Università degli Studi di Salerno
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Formalizzazione della geometria senza punti di A. N. Whitehead

RELATORE :
prof .
Giangiacomo Gerla

CANDIDATO :
Antonio Pecoraro
Matr. N. 050/100147

ANNO ACCADEMICO 2005 / 06

Indice

Introduzione

Perché una geometria non fondata sulla nozione di punto.

Da Euclide ai giorni nostri le diverse proposte di fondazione della geometria hanno sempre avuto in comune l'assunzione del punto come ente primitivo. Anzi, da Cantor in poi, possiamo affermare che il punto è l'<u>unico</u> ente primitivo, giacché è possibile definire tutte le altre figure geometriche come opportuni insiemi di punti.

D'altra parte, poiché è evidente che la natura non fabbrica oggetti senza dimensioni (proprietà che la geometria non riconosce ai punti), dovrebbe essere di uguale (se non maggiore) interesse concepire un sistema di assiomi in cui il concetto di punto è definito da termini primitivi più facilmente derivabili dalla natura, come quello di "corpo solido" o di "regione dello spazio".

È possibile, inoltre, che un'adeguata formalizzazione della geometria dei solidi sia utile per lo studio dei processi di astrazione che conducono alla formazione del concetto di punto nei bambini. Senza entrare troppo nel merito di tale questione, ci limitiamo ad osservare che l'apprendimento del concetto di corpo solido (e delle relative proprietà topologiche) precede nei bambini quello di punto, di retta o di piano. Difatti, lo stesso espediente usato dagli insegnanti, di dire che bisogna immaginare il punto come una pallina piccolissima o come un granello di sabbia, prova che l'identificazione di un punto con l'insieme dei solidi capaci di *rappresentarlo* è più naturale di quanto a prima vista possa sembrare.

Una geometria dei solidi sembra opportuna anche per quanto riguarda il campo delle applicazioni. Ad esempio, è chiaro che il tipo di "conoscenze geometriche" da fornire ad un automa deve riferirsi ai corpi solidi ed alle regioni dello spazio con le reciproche relazioni, piuttosto che a nozioni astratte quali quelle di punto, retta o superficie.

È necessario, però, osservare che la formalizzazione del concetto di corpo solido o di oggetto materiale, presenta notevoli difficoltà. Un oggetto, infatti, ci appare lo stesso quando si sposta nello spazio e quindi non può identificarsi con la porzione di spazio occupata. In effetti, l'idea di corpo solido sembrerebbe essere contestuale a quella di gruppo di movimenti dello spazio. Inoltre, non è possibile definire nell'insieme dei corpi solidi quelle relazioni così care alla tradizione matematica, come ad esempio l'intersezione. Due oggetti non possono avere una parte in comune: un coltello è formato da un manico ed una lama, ma essi sono due corpi solidi diversi ed occupanti due pezzi di spazio ben distinti. Pertanto è preferibile la nozione (altrettanto naturale, ma indubbiamente più maneggevole) di regione, concepita appunto come "porzione di spazio possibile ricettacolo di oggetti".

Questa tesi si propone di approfondire uno degli isolati e poco noti tentativi di fondare la geometria dello spazio sul solo concetto di regione: quello del matematico e filosofo inglese A. N. Whitehead. La trattazione di Whitehead consiste di un'analisi puramente qualitativa e di tipo filosofico, che ben si presta, però, a possibili formalizzazioni, divenendo così punto di partenza per teorie matematiche dello spazio di notevole interesse.

L'analisi di Whitehead di come si possa derivare la nozione di punto da quella di regione comincia con le opere *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge (1919)* e *The concept of Nature (1920)*, in cui vengono assunti come primitivi i concetti di *regione* e di *inclusione tra regioni*. Il contenuto del capitolo 2 consiste in una trattazione matematica delle idee esposte in questi libri. Più interessante è però l'opera *Process and reality (1929)*, in cui sostituisce la nozione di inclusione con quella di *connessione*. Nel capitolo 3 si propone una soddisfacente formalizzazione di tale punto di vista. Nel capitolo 1 si ricordano alcune nozioni matematiche che si riveleranno utili nei capitoli successivi.

CAPITOLO 1

Preliminari

In questo capitolo ricorderemo alcune nozioni elementari riguardanti le strutture relazionali, quelle topologiche, e le algebre di Boole che saranno utili per fornire opportuni modelli della nozione di regione.

1.1 Ordini e preordini

Definizione 1.1.0. Una relazione G su un insieme S è:
- *riflessiva* $\Leftrightarrow_{def}$ $\forall x\ (x\mathrm{G}x)$;
- *antiriflessiva* $\Leftrightarrow_{def}$ $\forall x\ \neg(x\mathrm{G}x)$;
- *antisimmetrica* $\Leftrightarrow_{def}$ $(x\mathrm{G}y$ e $y\mathrm{G}x \Rightarrow x = y)$;
- *asimmetrica* $\Leftrightarrow_{def}$ $(x\mathrm{G}y \Rightarrow \neg(y\mathrm{G}x))$;
- *transitiva* $\Leftrightarrow_{def}$ $(x\mathrm{G}y$ e $y\mathrm{G}z \Rightarrow x\mathrm{G}z)$.

Definizione 1.1.1. Una relazione su un insieme S è:

- un *preordine* se è riflessiva e transitiva, e sarà denotata col simbolo $\leq$;
- un *ordine largo* (in breve *ordine*) se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, e sarà denotata ancora con il simbolo $\leq$;
- un *ordine stretto* se è antiriflessiva e transitiva, e sarà indicata col simbolo $<$.

Osserviamo che le nozioni di ordine largo e di ordine stretto si "equivalgono", perché se da un lato è possibile ottenere una relazione d'ordine stretto $<$ da una ordine $\leq$ ponendo

$$a<b \quad \Leftrightarrow_{def} \quad a\leq b \ \text{ e } \ a \neq b,$$

dall'altro è possibile ottenere una relazione ordine largo da un ordine stretto $<$ ponendo

$$a\leq b \quad \Leftrightarrow_{def} \quad a<b \ \text{ o } \ a = b.$$

Ad ogni preordine è associata una relazione $\equiv$ definita ponendo:

$$a \equiv b \quad \Leftrightarrow_{def} \quad a\leq b \ \text{ e } \ b\leq a.$$

Chiaramente la relazione $\equiv$ è d'equivalenza e genera l'insieme quoziente $S/\equiv$. In realtà $\equiv$ è una relazione di congruenza rispetto a $\leq$ nel senso che vale l'implicazione

$$x \equiv x' \;\text{ e }\; y \equiv y' \;\Rightarrow\; (x \leq y \;\Leftrightarrow\; x' \leq y').$$

Tale proprietà consente di porre la seguente definizione:

$$[a] \leq [b] \;\Leftrightarrow_{def}\; a \leq b.$$

E' semplice verificare che la struttura (S $/\equiv$, $\leq$) è un insieme ordinato. Ad esempio, per provare che $\leq$ è antisimmetrica, osserviamo che:

$$[a] \leq [b] \text{ e } [b] \leq [a] \;\Rightarrow\; a \leq b \text{ e } b \leq a \;\Rightarrow\; a \equiv b \;\Rightarrow\; [a] = [b].$$

Molte tra le nozioni definite per gli insiemi ordinati possono essere estese agli insiemi preordinati.

Definizione 1.1.2. Dato un insieme preordinato S ed un sottoinsieme B di S:

- diremo *minimo* (*massimo*) di B un elemento $a \in$B se $a \leq b$ ($b \leq a$) per ogni $b \in$B;
- diremo *minimale* (*massimale*) un elemento $a \in$B se non esiste alcun $b \in$B tale che $b < a$ ($a < b$);
- diremo *minorante* (*maggiorante*) di B un elemento $a \in$S se $a \leq b$ ($b \leq a$) per ogni $b \in$B;
- B si dice *inferiormente* (*superiormente*) *limitato* se ammette qualche minorante (maggiorante);
- diremo *estremo inferiore* (*superiore*) di B un elemento che sia massimo (minimo) dell'insieme dei minoranti (maggioranti).

In un insieme preordinato un minimo (massimo) non è detto che sia unico. Vale, infatti, la seguente

Proposizione 1.1.3. Sia B un sottoinsieme di un insieme preordinato S, x un minimo (massimo) di B e $y \in$B. Allora y è un minimo (massimo) di B se e solo se x ed y sono equivalenti.

Dim. ($\Rightarrow$): da y minimo segue $y \leq x$; da x minimo segue $x \leq y$.
Viceversa ($\Leftarrow$), da $x \equiv y$ segue $y \leq x$; ma, essendo x minimo, è $x \leq b$ $\forall b \in$B. Per transitività si ha $y \leq b$ $\forall b \in$B. (Per il massimo il discorso è analogo).

□

Osservazioni: E' evidente che in un insieme preordinato un estremo inferiore (superiore) non è detto che sia unico. Inoltre, ogni minimo (massimo) è minimale (massimale), infatti: se z è un minimo, allora si ha $z \leq b$ per ogni $b \in$B, è quindi evidente che non può esistere in B un $d < z$.

Proposizione 1.1.4. Sia S un insieme preordinato, x un elemento minimale di S e $y \in$S. Si ha:

$$x \equiv y \;\Rightarrow\; y \text{ minimale}$$

Dim. Se esistesse $z < y$, allora poiché è $y \leq x$, seguirebbe l'assurdo $z < x$,

□

Proposizione 1.1.5. Sia S un insieme preordinato ed $(S/\equiv,\leq)$ l'insieme ordinato associatogli. Allora:

$$x \text{ è un minimo di } (S,\leq) \quad \Leftrightarrow \quad [x] \text{ è l'unico minimo di } (S/\equiv, \leq).$$

Dim. $(\Rightarrow)$: da $x\leq b$ per ogni $b\in S$ segue $[x]\leq[b]$ per ogni $b\in S$, e quindi $[x]\leq[b]$ per ogni $[b]\in S/\equiv$. Inoltre, sia $[x']\in S/\equiv$ un minimo. Si avrebbe: da un lato $[x']\leq[x]$ perché $[x']$ minimo; dall'altro $[x]\leq[x']$ perché $[x]$ minimo. E quindi $[x] = [x']$.
Viceversa $(\Leftarrow)$, se $[x]\leq[b]$ per ogni $[b]\in S/\equiv$, si ha $[x]\leq[b]$ per ogni $b\in S$, e quindi $x\leq b$ per ogni $b\in S$.

□

Riportiamo, ora, alcune nozioni sugli insiemi ordinati.

Definizione 1.1.6. Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato. Dicesi che S è *totalmente ordinato* se per ogni $x,y\in S$ si ha $x\leq y$ oppure $x\leq y$. Una parte di S dicesi *catena* se è totalmente ordinata rispetto alla relazione indotta. Una catena chiamasi *massimale* quando non è inclusa propriamente in alcuna altra catena di S. Dicesi che S è *ben ordinato* se ogni sua parte non vuota ammette minimo; dicesi che S è *induttivo* se ogni sua parte non vuota è superiormente limitata.

Definizione 1.1.7. Siano $(S,\leq)$ e $(T,\leq)$ insiemi ordinati. Un'applicazione $f: S \rightarrow T$ dicesi *crescente* se $x\leq y$ in S implica $f(x) \leq f(y)$ in T, *strettamente crescente* se da $x<y$ segue $f(x) < f(y)$. Dicesi una *similitudine* di $(S,\leq)$ in $(T,\leq)$ se è biettiva e se $x<y$ in S equivale ad $f(x) < f(y)$ in T. Gli insiemi $(S,\leq)$ e $(T,\leq)$ si dicono *simili* e scriveremo $(S,\leq) \approx (T,\leq)$ se esiste una similitudine di $(S,\leq)$ in $(T,\leq)$.

Le seguenti derivano da analoghe definizioni di natura insiemistica.

Definizione 1.1.8. Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato. Diremo che due elementi a e b di S *si intersecano* se esiste in S un elemento c diverso dall'eventuale minimo tale che $c\leq a$ e $c\leq b$. Chiameremo *separati* due elementi di S che non si intersecano. Diremo *separato* un insieme T se i suoi elementi sono a due a due separati.

Definizione 1.1.9. Sia $(S,\leq)$ un insieme ordinato ed $a\in S$. Chiameremo *partizione* di a una classe D di elementi di S a due a due separati tale che $a = \sup(D)$.

È evidente che se S è l'insieme delle parti di un dato insieme e $\leq$ è la relazione di inclusione, allora il concetto di partizione coincide con quello di partizione insiemistica. Pertanto la definizione proposta è un'estensione a qualunque reticolo della nozione usuale di partizione.

1.2 Algebre di Boole e teorema di Stone

Definizione 1.2.1. Un'*algebra di Boole* è una struttura $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ con due operazioni binarie $+$ e $\cdot$, un'operazione unaria $-$, e due elementi distinti 0 e 1 tale che:

per ogni $x,y,z\in A$,

(B1) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(B1′) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	(associatività)
(B2) $x + y = y + x$	(B2′) $x \cdot y = y \cdot x$	(commutatività)
(B3) $x + (x \cdot y) = x$	(B3′) $x \cdot (x + y) = x$	(assorbimento)
(B4) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	(B4′) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	(distributività)
(B5) $x + (- x) = 1$	(B5′) $x \cdot (-x) = 0$	(complementazione)

Esempio: se X è un insieme e $\mathcal{P}$(X) l'insieme delle sue parti, la struttura

$$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, -, \emptyset, X), \qquad \text{con } -a =_{def} X \setminus a \quad \text{complemento di } a \text{ rispetto a } X,$$

è un'algebra di Boole, detta *algebra dell'insieme delle parti*.

Definizione 1.2.2. Una sottoalgebra dell'algebra di Boole $\mathcal{P}$(X) è detta *un'algebra di insiemi su* X. Un'algebra di Boole è un'*algebra di insiemi* se è un'algebra di insiemi su X, per qualche X.

Ogni algebra di Boole è ordinata dalla relazione definita ponendo

$$x \leq y \iff_{def} x + y = y.$$

Definizione 1.2.3. Un'algebra di Boole A dicesi *completa* se per ogni B$\subseteq A$ esistono inf B e sup B.

Indichiamo con A^+ l'insieme $\{x \in A : x \neq 0\}$, e poniamo $x<y \iff_{def} (x \leq y \text{ e } x \neq y)$.

Definizione 1.2.4. Sia A un'algebra di Boole. Un elemento $a \in A$ è un *atomo* di A se è un elemento minimale di $(A^+, \leq)$, cioè se $0<a$ ma non esiste un x in A tale che $0<x<a$. $At(A)$ indicherà l'insieme degli atomi di A; A è *atomica* se per ogni $x \in A^+$ esiste un atomo a tale che $a \leq x$.

L'algebra dell'insieme delle parti $\mathcal{P}$(X) è atomica: gli atomi sono i singletons $\{x\}$ con $x \in$X.

Proposizione 1.2.5. Per ogni algebra di Boole A, la funzione $f : A \to \mathcal{P}(At(A))$ definita ponendo $f(x) = \{a \in At(A) : a \leq x\}$ è un omomorfismo. Se A è atomica f è un monomorfismo; se A è completa f è un epimorfismo.

Da tale proposizione e dal teorema fondamentale degli omomorfismi, segue che ogni algebra di Boole atomica è isomorfa ad un'algebra d'insiemi. Inoltre ogni algebra di Boole completa e atomica è isomorfa all'algebra dell'insieme delle parti.

Definizione 1.2.6. Un *filtro* in un'algebra di Boole A è un sottoinsieme p di A tale che:

(i) $1 \in p$;

(ii) se $x \in p$, $y \in A$ e $x \leq y$ allora $y \in p$;

(iii) se $x \in p$ e $y \in p$ allora $x \cdot y \in p$.

Ad esempio, per ogni $a \in A$, l'insieme $\{x \in A : a \leq x\}$ è un filtro in A. Tale filtro per a = 1 si riduce a $\{1\}$, e per $a = 0$ coincide con A.

Definizione 1.2.7. Un filtro p di A è:
- *principale* se $p = \{x \in A : a \leq x\}$ per qualche $a \in A$;
- *banale* se $p = \{1\}$;
- *proprio* se $0 \notin p$ (cioè se $p \neq A$).

Un sottoinsieme E di A ha la *proprietà dell'intersezione finita* (FIP) se per ogni $n \in \omega$ e $e_1, \ldots, e_n \in E$, $e_1 \cdot \cdots \cdot e_n > 0$.

Lemma 1.2.8. Se E è un sottoinsieme di A, allora l'insieme

$$\{x \in A : e_1 \cdot \cdots \cdot e_n \leq x \text{ per qualche } n \in \omega \text{ e } e_1, \ldots, e_n \in E\}$$

è un filtro di A, ed è detto *filtro generato da* E. Il filtro generato da E è il più piccolo filtro di A contenente E, esso è proprio se e solo se E ha la FIP. Se E è finito, si ottiene il filtro principale generato dall'intersezione degli elementi di E.

Le due seguenti proprietà, prese insieme, caratterizzano i filtri:

(i) $1 \in p$;

(ii) $\forall x,y \in A$ ($x \cdot y \in p \Leftrightarrow x \in p$ e $y \in p$).

Definizione 1.2.9. Un filtro p di A è:
- un *ultrafiltro* se, per ogni $x \in A$, $x \in p$ o $-x \in p$ ma non entrambi;
- *primo* se è proprio e, per ogni $x,y \in A$, $x + y \in p$ implica che $x \in p$ o $y \in p$;
- *massimale* se è proprio e non esiste un filtro proprio di A contenente propriamente p.

Tipico esempio di ultrafiltro è, se A è un'algebra di insiemi su X e x un punto di X, l'insieme $\{a \in A : x \in a\}$. In un'algebra di Boole, per un filtro:

$$\text{massimale} \Leftrightarrow \text{primo} \Leftrightarrow \text{ultrafiltro}.$$

Un sottoinsieme di A è contenuto in un ultrafiltro se e solo se ha la FIP. In particolare un elemento $a \in A$ è contenuto in un ultrafiltro se e solo se $a > 0$.

Teorema 1.2.10. (esistenza dell'ultrafiltro)[1]. Per ogni filtro proprio p esiste un ultrafiltro che lo contiene.

[1] La dimostrazione fa uso dell'*assioma della scelta* nella versione del *Lemma di Zorn*, ma non sussiste l'equivalenza. Tuttavia, di tale teorema non se ne conoscono dimostrazioni effettive. **Lemma di Zorn**: Sia (S, ≤) un insieme ordinato. Se ogni catena di S ammette maggiorante, allora ogni elemento di S è contenuto in qualche elemento massimale.

Dim. Sia F_p l'insieme dei filtri propri che contengono p e sia C una catena di F_p. Per provare che C ammette maggiorante consideriamo l'insieme $F = \cup_{c \in C}\, c$. Che F contenga c per ogni $c \in C$ è ovvio, inoltre si verifica facilmente che F è un filtro. Per il *Lemma di Zorn*, F_p ammette un elemento massimale, che è l'ultrafiltro cercato.

□

Definizione 1.2.11. Per un'algebra di Boole A

$$Ult\,(A) = \{p \subseteq A : p \text{ è un ultrafiltro di } A\}$$

è l'insieme degli ultrafiltri di A. La funzione

$$h : A \to \mathcal{P}(Ult\,(A)) \qquad \text{definita ponendo} \qquad h(x) = \{p \in Ult\,A : x \in p\}$$

è detta *funzione di Stone.*

Teorema 1.2.12 (teorema di rappresentazione di **Stone**, versione insiemistica). Data un'algebra di Boole A, la funzione di Stone è un omomorfismo iniettivo. Di conseguenza, ogni algebra di Boole è isomorfa ad un'algebra d'insiemi.

Una più generale definizione di filtro può essere data per gli insiemi ordinati.

Definizione 1.2.13. Un sottoinsieme non vuoto F di un insieme ordinato (S,≤) è un *filtro* se:

(i) $\forall x \in F \;\; \forall y \in S \;\; (x \leq y \;\Rightarrow\; y \in F)$

(ii) $\forall x \in F \;\; \forall y \in F \;\; \exists z \in F \; (z \leq x \text{ e } z \leq y)$

Diremo, inoltre, che un filtro F è:

- *banale* se $F = S$;
- *principale* se $F = \{y \in S : x \leq y\}$ per qualche $x \in S$;
- *proprio* se $\emptyset \notin F$ (cioè se $F \neq S$);
- *massimale* se è proprio e non esiste un filtro proprio di S che lo contiene propriamente.

Come nel caso dei reticoli, l'*assioma della scelta* permette di acquisire il seguente risultato.

Teorema 1.2.14. (esistenza del filtro massimale). Ogni filtro F è contenuto in qualche filtro massimale.

1.3 Aperti e chiusi

Definizione 1.3.1. Sia (M,τ) uno spazio topologico e sia E⊆M. La *chiusura* di E in M è l'insieme

$$E^- = \cap\{K \subseteq M \mid K \text{ chiuso di M e } E \subseteq K\}$$

Si prova banalmente che: se $A \subseteq B$ allora $A^- \subseteq B^-$.

Teorema 1.3.2. L'operazione $A \to A^-$ in uno spazio topologico ha le seguenti proprietà:

a) $A \subseteq A^-$ b) $(A^-)^- = A^-$ c) $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$

d) $\emptyset^- = \emptyset$ e) A chiuso $\Leftrightarrow A^- = A$

Definizione 1.3.3. Sia M uno spazio topologico e sia $E \subseteq M$, l'*interno* di E in M è l'insieme

$$E^\circ = \cup\{G \subseteq M \mid G \text{ aperto di } M \text{ e } G \subseteq E\}$$

Si osserva che $A \subseteq B$ implica $A^\circ \subseteq B^\circ$. (Per evitare un numero elevato di parentesi, assumeremo che gli operatori di interno $^\circ$ e di chiusura $^-$ abbiano la precedenza sugli altri operatori, tra cui il complemento -). Valgono le seguenti uguaglianze:

$$-E^\circ = (-E)^- \quad \text{e} \quad -E^- = (-E)^\circ.$$

Teorema 1.3.4. L'operazione $A \to A^\circ$ in uno spazio topologico ha le seguenti proprietà:

a) $A^\circ \subseteq A$ b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

d) $M^\circ = M$ e) A aperto $\Leftrightarrow A^\circ = A$

Definizione 1.3.5. Sia M uno spazio topologico e sia $E \subseteq M$, la *frontiera* di E in M è l'insieme

$$\partial E = E^- \cap (M - E)^-$$

La frontiera è chiaramente un insieme chiuso.

Un'altra definizione di frontiera può essere data tramite il concetto di "aderenza".

Definizione 1.3.6. Sia M uno spazio topologico e sia $A \subseteq M$. Un punto x di M si dice *aderente* ad A se $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x.
Ciò permette di definire la *frontiera* di A come l'insieme dei punti aderenti sia ad A che a -A.

Sono di immediata verifica le seguenti relazioni:

a) $E^\circ \cap \partial E = \emptyset$ b) $E^- = E \cup \partial E = E^\circ \cup \partial E$

c) $E^\circ = E - \partial E = E^- - \partial E$ d) $M = E^\circ \cup \partial E \cup (-E)^\circ$

e) $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$ f) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$

g) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ h) E aperto $\Leftrightarrow E \cap \partial E = \emptyset$

i) E chiuso $\Leftrightarrow \partial E \subseteq E$

1.4 Aperti e chiusi regolari

Proposizione 1.4.1. Sia (M,τ) uno spazio topologico. La funzione $\rho: \tau \to \tau$ che ad ogni aperto X di M associa l'interno della chiusura $(X^-)^\circ$ è detta *regolarizzatore* e per ogni coppia di aperti X,Y di M si ha:

(i) $X \subseteq \rho(X)$; (ii) $X \subseteq Y \Rightarrow \rho(X) \subseteq \rho(Y)$; (iii) $\rho(\rho(X)) = \rho(X)$.

Dim. (i): $X = X^{\circ} \subseteq (X^{-})^{\circ} = \rho(X)$.
(ii): È ovvia.
(iii): Notiamo che $(X^{-})^{\circ}$ è un aperto contenuto in $((X^{-})^{\circ})^{-}$ e quindi nel suo interno, cioè $\rho(X) \subseteq \rho(\rho(X))$; d'altra parte da $(X^{-})^{\circ} \subseteq X^{-}$ segue $((X^{-})^{\circ})^{-} \subseteq X^{-}$ e quindi $\rho(\rho(X)) \subseteq \rho(X)$.

□

Definizione 1.4.2. Diremo *aperto regolare* ogni punto fisso di ρ, cioè ogni aperto che coincida con l'interno della propria chiusura. In simboli: X è un *aperto regolare* se $X = \rho(X)$; ovvero se $X = (X^{-})^{\circ}$. Diremo che X è un *chiuso regolare* se $X = (X^{\circ})^{-}$.

Proposizione 1.4.3. Per ogni insieme aperto X, ρ(X) è il più piccolo aperto regolare contenente X.

Dim. Da (i) sappiamo che ρ(X) contiene X, da (iii) che ρ(X) è un aperto regolare; se poi Y è un aperto regolare contenente X, allora per la (ii), $Y = \rho(Y) \supseteq \rho(X)$.

□

Proposizione 1.4.4.
(i) Se X è un aperto regolare, la sua chiusura X^{-} è un chiuso regolare;
(ii) Se X è un aperto regolare, il suo complemento -X è un chiuso regolare;
(iii) Se X è un chiuso regolare, il suo complemento -X è un aperto regolare;
(iv) Se X,Y sono due aperti regolari, allora $X \cap Y$ è un aperto regolare;

Dim. Le prime tre sono elementari. Proviamo l'ultima: $X \cap Y$ è un aperto e quindi $X \cap Y \subseteq \rho(X \cap Y)$. D'altra parte, da $X \cap Y \subseteq X$ segue $\rho(X \cap Y) \subseteq \rho(X) = X$, analogamente si ha $\rho(X \cap Y) \subseteq Y$. Infine, è $\rho(X \cap Y) \subseteq X \cap Y$, e quindi $\rho(X \cap Y) = X \cap Y$.

□

Sono di immediata verifica le seguenti asserzioni:
(i) Se X è un aperto, X^{-} è un chiuso regolare;
(ii) Se X è un chiuso, X° è un aperto regolare;
(iii) X è un aperto regolare se e solo se $\partial X = \partial X^{-}$;
(iv) X è un chiuso regolare se e solo se $\partial X = \partial X^{\circ}$.

Proposizione 1.4.5. Siano X e Y aperti regolari:
(i) se $Y \subseteq X^{-}$, allora $Y \subseteq X$;
(ii) se $X \subset Y$, allora $Y - X^{-}$ è un aperto regolare non vuoto.

Dim. (i): da $Y \subseteq X^{-}$ segue $Y = Y^{\circ} \subseteq (X^{-})^{\circ} = X$.
(ii): da X aperto regolare segue, per la (i) e la (iii) della **1.4.4**, che $-X^{-}$ è un aperto regolare. Per la (iv) della **1.4.4,** essendo Y aperto regolare, si ha che $Y - X^{-} =$

$Y \cap (-X^-)$ è un aperto regolare. Se poi fosse $Y - X^- = \emptyset$, sarebbe $Y \subseteq X^-$, e, poiché vale la (i), $Y \subseteq X$, in contrasto con le ipotesi.

□

Definiamo ora le relazioni S, C, e $\ll$ che saranno utili in seguito. Siano X e Y aperti regolari, poniamo:

$$X\mathsf{S}Y \Leftrightarrow_{def} \exists Z \text{ aperto regolare } (Z \subseteq X \text{ e } Z \subseteq Y)\ ;$$

$$X\mathsf{C}Y \Leftrightarrow_{def} X^- \cap Y^- \neq \emptyset\ ;$$

$$X \ll Y \Leftrightarrow_{def} \mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{S}(Y).$$

Si osserva che: se $X\mathsf{S}Y$, allora $X\mathsf{C}Y$. In altre parole, per ogni aperto regolare X si ha $\mathsf{S}(X) \subseteq \mathsf{C}(X)$. È inoltre evidente che: se $X \ll Y$ e $Y \subseteq Y_1$, allora $X \ll Y_1$; se $X \ll Y$ e $X_1 \subseteq X$, allora $X_1 \ll Y$.

Proposizione 1.4.6. Sia (M,τ) uno spazio topologico. Per ogni coppia di aperti regolari X,Y distinti da M le seguenti relazioni sono equivalenti:

1) $X \ll Y$ 2) $\neg(X\mathsf{C}(-Y^-))$ 3) $X^- \subseteq Y$

Dim. <u>$3 \Rightarrow 1$</u>: sia Z un aperto regolare appartenente a $\mathsf{C}(X)$, si ha $Z^- \cap X^- \neq \emptyset$, che unito all'ipotesi, dà $Z^- \cap Y \neq \emptyset$. Ciò implica $Z^- \cap Y^- \neq \emptyset$, ovvero $Z\mathsf{S}Y$, da cui Z appartiene a $\mathsf{S}(Y)$. Abbiamo così provato che $\mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{S}(Y)$, cioè la tesi.

<u>$1 \Rightarrow 2$</u>: per ipotesi è $\mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{S}(Y)$. Ora se fosse $X\mathsf{C}(-Y^-)$ si avrebbe $(-Y^-)\mathsf{S}(Y)$, che è assurdo.

<u>$2 \Rightarrow 3$</u>: $\neg(X\mathsf{C}(-Y^-)) \Rightarrow X^- \cap (-Y^-)^- = \emptyset$; ma $X^- \cap (-Y^-)^- = X^- \cap (-(Y^-)^\circ) = X^- \cap -Y$, quindi $X^- \cap -Y = \emptyset$, che vuol dire $X^- \subseteq Y$.

□

Osservazione 1.4.7. Sia (M,τ) uno spazio topologico. Per ogni coppia di aperti regolari X,Y di M le seguenti relazioni sono equivalenti:

1) $X\mathsf{S}Y$ 2) $X \cap Y \neq \emptyset$ 3) $X^- \cap Y \neq \emptyset$

Proposizione 1.4.8. Se $X \not\subseteq Y$, allora esiste $X_1 \subseteq X$ tale che $X_1 \cap Y = \emptyset$; pertanto $X \subseteq Y$ se e solo se $\mathsf{S}(X) \subseteq \mathsf{S}(Y)$.

Dim. La dimostrazione è banale una volta scelto $X_1 = X - Y^-$.

Proposizione 1.4.9.

1) Se $X \subseteq Y$, allora $\mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{C}(Y)$.
2) Se per ogni X_1 esiste $X_2 \ll X_1$, allora $X \subseteq Y$ se $\mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{C}(Y)$.

Dim. La 1) è ovvia. Per provare la 2), supposto $\mathsf{C}(X) \subseteq \mathsf{C}(Y)$, sia per assurdo $X \not\subseteq Y$. Per **1.4.8**, esiste $X_1 \subseteq X$ tale che $X_1 \cap Y = \emptyset$, e quindi, per **1.4.7**, $X_1 \cap Y^- = \emptyset$. Sia ora $X_2 \ll X_1$; per **1.4.6** si ha $X_2^- \subseteq X_1$, ma era $X_1 \subseteq X$, segue $X_2^- \subseteq X$, da cui $X_2^- \cap X \neq$

$\emptyset$, ed anche $X_2^- \cap X^- \neq \emptyset$, ovvero $X_2 C X$, e quindi, per ipotesi, $X_2 C Y$. Ciò significa $\emptyset \neq X_2^- \cap Y^- \subseteq X_1 \cap Y^- = \emptyset$, che è assurdo.

□

Ricordiamo che un insieme è detto *clopen* se è allo stesso tempo aperto e chiuso. In particolare: A è un clopen se e solo se $\partial A = \emptyset$.

1.5 L'algebra di Boole degli aperti regolari

Dato uno spazio topologico sono definiti due esempi di algebra di Boole. Il primo è costituito dalla classe dei clopen: infatti, è immediato provare che l'unione, l'intersezione e il complemento di un clopen è ancora un clopen. Il secondo, a cui siamo maggiormente interessati, è il seguente:

Proposizione 1.5.1. La classe $\mathcal{RO}$ degli aperti regolari di uno spazio topologico M ordinata dall'inclusione insiemistica $\subseteq$, è un'algebra di Boole completa in cui:

(i) $\emptyset$ e M sono rispettivamente gli elementi 0 e 1;

(ii) l'operatore di complementazione è definito ponendo, per ogni $X \in \mathcal{RO}$,

$$-X = \rho(M-X) = (M-X)^{\circ} ;$$

(iii) data una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di aperti regolari

$$\inf\{X_i : i \in I\} = \rho(\cap X_i) \quad \text{e} \quad \sup\{X_i : i \in I\} = \rho(\cup X_i) ;$$

(iv) dati due aperti regolari X e Y

$$X \cdot Y = X \cap Y ; \qquad X + Y = \rho(X \cup Y).$$

Non è difficile verificare che la classe $\mathcal{RC}$ dei chiusi regolari di uno spazio topologico M ordinata dall'inclusione insiemistica $\subseteq$ è anch'essa un'algebra di Boole, ed è isomorfa a $\mathcal{RO}(M)$.

Proposizione 1.5.2. La classe $\mathcal{R}$ degli aperti regolari connessi limitati e non vuoti di uno spazio euclideo costituisce una base per la topologia. In altri termini, dato un qualunque aperto A e un punto x in A, esiste un elemento di $\mathcal{R}$ contenuto in A e contenente x.

Dim. Per provare l'asserto basta osservare che le sfere aperte sono elementi di $\mathcal{R}$ e soddisfano i requisiti richiesti.

1.6 Assiomi di separazione

In questo paragrafo: sia (M,τ) uno spazio topologico, gli elementi di M sono chiamati **punti**, qualunque cosa essi siano; ma nei prossimi capitoli saranno semplicemente chiamati **elementi**: dato che il *punto* sarà per noi un concetto ancora sconosciuto.

Definizione 1.6.1. Uno spazio topologico M è uno spazio $\boldsymbol{T_0}$ se per ogni coppia di punti distinti di M esiste un intorno di uno di essi che non contiene l'altro.

Definizione 1.6.2. Uno spazio topologico M è uno spazio $\boldsymbol{T}_1$ se per ogni coppia di punti distinti x,y di M esiste un intorno di ciascuno che non contiene l'altro.

Teorema 1.6.3. Sono equivalenti:

a) M è $\boldsymbol{T}_1$;
b) ogni punto x di M è chiuso;
c) per ogni $x \in M$ l'intersezione degli intorni di x è $\{x\}$.

Definizione 1.6.4. Uno spazio topologico M è uno spazio $\boldsymbol{T}_2$ (o di *Hausdorff*) se per ogni coppia di punti distinti x,y di M esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $y \in V$.

Teorema 1.6.5. Sono equivalenti:

a) M è $\boldsymbol{T}_2$;
b) la diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in M\}$ è chiusa in $M \times M$;
c) per ogni $x \in M$ l'intersezione degli intorni chiusi di x è $\{x\}$.

Definizione 1.6.6. Uno spazio topologico M è uno spazio $\boldsymbol{T}_3$ (o *regolare*) se:

(i) è $\boldsymbol{T}_1$;
(ii) per ogni chiuso A di M e per ogni $x \notin A$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $A \subseteq V$.

Teorema 1.6.7. Sono equivalenti:

a) M è $\boldsymbol{T}_3$;
b) se U è un aperto di M e $x \in U$, allora esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V^{-} \subseteq U$;
c) gli intorni chiusi di ogni punto $x \in M$ costituiscono un sistema fondamentale d'intorni.

Si osserva che: $\boldsymbol{T}_3 \Rightarrow \boldsymbol{T}_2 \Rightarrow \boldsymbol{T}_1 \Rightarrow \boldsymbol{T_0}$

Definizione 1.6.8. Uno spazio topologico M è *semiregolare* se ammette come base i regolari.

Proposizione 1.6.9. Uno spazio regolare è semiregolare.

Dim. Sia U un aperto dello spazio regolare M e $x \in U$. Per **1.6.7** esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V^- \subseteq U$. Si ha quindi $V \subseteq U$. Inoltre la **1.4.1i** ci dice che $V \subseteq (V^-)^\circ$, ma banalmente è $(V^-)^\circ \subseteq V^-$. Infine si ha $(V^-)^\circ \subseteq U$. In altre parole: preso x e U aperto contenente x, abbiamo provato che esiste un aperto regolare $\rho(V)$ contenente x e contenuto in U; (ovvero: per ogni x gli aperti regolari sono una base locale in x).

□

Teorema 1.6.10. Ogni sottospazio di uno spazio $\boldsymbol{T_3}$, oppure $\boldsymbol{T_2}$, oppure $\boldsymbol{T_1}$, oppure $\boldsymbol{T_0}$, è rispettivamente uno spazio $\boldsymbol{T_3}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_0}$.

1.7 Connessione

Definizione 1.7.1. Uno spazio topologico M è *connesso* se non esistono due aperti (equivalentemente chiusi) disgiunti non vuoti A e B tali che $A \cup B = M$. Un sotto-insieme E di uno spazio topologico si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta.

Ne segue che uno spazio topologico M è connesso se e solo se gli unici clopen sono $\emptyset$ e M.

Proposizione 1.7.2. Se A è un aperto connesso, allora $\rho(A)$ è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano due aperti disgiunti e non vuoti A_1 e A_2 tali che $\rho(A) = A_1 \cup A_2$. Allora $A \subseteq A_1 \cup A_2$, ma essendo A connesso si ha che A è contenuto in uno soltanto dei due; in particolare A interseca uno solo fra A_1 e A_2.
Ora, se fosse $A_1 \cap A = \emptyset$, essendo in tal caso $-A_1$ un chiuso contenente A, si avrebbe $-A_1 \supseteq A^- \supseteq (X^-)^\circ = \rho(A)$, da cui $\rho(A) \cap A_1 = \emptyset$, che è assurdo. Pertanto si ha $A_1 \cap A \neq \emptyset$, e, con ragionamento analogo, $A_2 \cap A \neq \emptyset$; il che è smentito dal fatto che A interseca soltanto uno tra A_1 e A_2.

□

Lemma 1.7.3. Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di connessi di M, due qualsiasi dei quali siano non disgiunti. Allora l'insieme $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è un connesso di M.

Corollario 1.7.4. Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di connessi di M, tale che $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$. Allora l'insieme $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è un connesso di M.

Definizione 1.7.5. Dato $x \in M$, il più grande sottoinsieme connesso C_x di M contenente x è detto *componente connessa* di x. Diremo *componente connessa* di un insieme A un sottoinsieme connesso massimale di A.

C_x è l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di M contenenti x, ed è connesso per la **1.7.4.** Inoltre: se M è connesso, per ogni $x \in M$ si ha $C_x = M$; se M ha la topologia discreta, per ogni $x \in M$ si ha $C_x = \{x\}$.

Lemma 1.7.6. Sia D un sottoinsieme di M denso in M. Se D è connesso, allora M è connesso.

Segue che: se E è un sottoinsieme connesso di M, ogni sottoinsieme A di M tale che $E \subseteq A \subseteq E^{-}$ è connesso. In particolare la chiusura di un insieme connesso è ancora un insieme connesso. Pertanto la componente connessa C_x di un qualsiasi punto x è un chiuso di M.

La relazione H definita ponendo

$$x\mathrm{H}y \quad \Leftrightarrow_{def} \quad \exists Z \text{ connesso} \in M : x,y \in Z$$

è una relazione d'equivalenza. Le classi d'equivalenza sono le componenti connesse dei punti di M e sono anche dette *componenti* di M. Lo spazio quoziente è quindi l'insieme $\{C_x : x \in M\}$, ed è totalmente sconnesso.

Definizione 1.7.7. Uno spazio topologico M dicesi *localmente connesso in un suo punto x* se x ammette un sistema fondamentale d'intorni connessi. Uno spazio localmente connesso in ogni suo punto dicesi *localmente connesso*.

Teorema 1.7.8. Uno spazio topologico M è localmente connesso se e solo se per ogni aperto regolare A di M ogni componente connessa di A è aperta in M.

Proposizione 1.7.9. Sia M uno spazio topologico localmente connesso, allora ogni componente connessa di un aperto regolare A è un aperto regolare.

Dim. Sia K una componente connessa di un aperto regolare A, per **1.7.8** K è un aperto di M. Segue banalmente che $\rho(K)$ è un aperto regolare contenente K, inoltre è connesso per la **1.7.2**; ma essendo A aperto regolare contenente K e $\rho(K)$ il più piccolo aperto regolare contenente K, si ha $A \supseteq \rho(K)$. Dalla massimalità di K si ha $\rho(K) \subseteq K$, e quindi $\rho(K) = K$.

□

La proprietà appena espressa si applica in particolare agli spazi euclidei.

Definizione 1.7.10. Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale reale o complesso si dice *convesso* se, per ogni x e y in C e ogni t nell'intervallo [0,1], il punto

$$(1 - t)\, x + t\, y$$

appartiene a C. In altre parole, ogni punto del segmento che connette x ad y appartiene a C. Ne segue che un convesso è connesso.

CAPITOLO 2

L’approccio basato sull’inclusione

In questo capitolo analizzeremo il tentativo di fondare una geometria sul solo concetto di regione che Whitehead fa nell’opera *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge (1919)* e poi ripreso, in maniera meno formalizzata, in *The concept of Nature (1920)*. Nei testi appena citati, Whitehead tenta innanzitutto di analizzare *la natura e la sua percezione*, e poi di edificare una geometria senza punti, (se “il percepito” è alla base di tutto, allora è anche alla base della geometria). Noi, invece, essendo poco interessati agli aspetti filosofici della questione, tenteremo di tradurre il più possibile le sue idee in termini matematici. Inoltre, mentre Whitehead opera in un ambiente tetradimensionale, in cui il *tempo* fa da quarto asse, noi ci riferiremo alle “più comuni” tre dimensioni, a spese proprio della variabile temporale. Questa modifica ci obbligherà a tralasciare alcuni concetti che, pur accettabili teoricamente, non troverebbero riscontro nel modello a cui ci riferiamo (vedi **2.6.2**).

2.1 Estensione, inclusione, intersezione

Whitehead considera strutture del tipo (M, K), dove M è un insieme i cui elementi chiama *eventi* e K una relazione binaria in M detta *relazione di estensione*. Tale relazione è assunta come primitiva e deriva dal concetto intuitivo “*contenere*”, inteso tuttavia in un senso geometrico e non insiemistico. Dati due eventi a e b di M, Whitehead esprime il fatto che b si estenda su a scrivendo $b\mathrm{K}a$, per poi procedere elencando “*…alcune proprietà essenziali per il metodo di astrazione estensiva…*”:

(i) $a\mathrm{K}b$ implica che a sia distinto da b; cioè il termine “parte” significa “parte propria”;

(ii) ogni evento si estende su altri eventi ed è esso stesso parte di altri eventi;

(iii) se le parti di b sono anche parti di a ed a è distinto da b allora $a\mathrm{K}b$;

(iv) la relazione K è transitiva;

(v) se $a\mathrm{K}c$, allora esistono eventi come b tali che $a\mathrm{K}b$ e $b\mathrm{K}c$;

(vi) se a e b sono due eventi qualsiasi, allora esistono eventi come c tali che $c\mathrm{K}a$ e $c\mathrm{K}b$.

In accordo con la scelta di escludere la variabile tempo, sostituiremo il termine *evento* con quello di *regione*, inteso come *porzione di spazio possibile ricettacolo di oggetti*. Inoltre, per essere più vicini all'attuale trattazione delle strutture ordinate, rimpiazzeremo la relazione di *estensione* K con quella equivalente d'*inclusione* che indicheremo con $\leq$. Tale relazione è assunta come primitiva e deriva dal concetto intuitivo "*essere parte di*". Da notare che, come mostra la condizione (i), Whitehead si riferisce ad una relazione non riflessiva e quindi ad un ordine stretto. Noi, invece, preferiamo una relazione riflessiva e quindi l'ordine largo. I due approcci risultano equivalenti, ma le relazioni d'ordine sono più semplici da trattare.

Le sei proprietà enunciate da Whitehead si traducono, allora, nei seguenti sei assiomi:

Il primo assioma sostiene che la relazione d'inclusione è riflessiva, il termine "parte" non significa "parte propria":

E1 $\forall a\ (a \leq a)$

Il secondo assioma asserisce la non esistenza di elementi minimali e massimali:

E2 $\forall b\ \exists a\ \exists c\ (a<b<c)$

Il terzo assioma afferma che prese due regioni distinte *a* e *b*, se le parti proprie di *a* sono anche parti proprie di *b* allora *a* è parte di *b*:

E3 $\forall a\ \forall b\ (\forall x\ (x<a\ \Rightarrow\ x<b)\ \Rightarrow\ a \leq b)$

Il quarto assioma esprime la proprietà transitiva della relazione di inclusione:

E4 $\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a \leq b \text{ e } b \leq c)\ \Rightarrow\ a \leq c)$

Il quinto assioma sostiene che l'insieme delle regioni è denso:

E5 $\forall a\ \forall c\ (a<c\ \Rightarrow\ \exists b\ (a<b<c))$

Il sesto assioma afferma che per ogni coppia di regioni ne esiste una che si estende su entrambe:

E6 $\forall a\ \forall b\ \exists c\ (a \leq c \text{ e } b \leq c)$

L'idea di Whitehead è quella di un insieme ordinato, e a tale scopo sceglie antiriflessiva e transitiva la relazione assunta come primitiva. Noi, invece, avendo preferito una relazione riflessiva, dobbiamo postularne l'antisimmetria perché sia un ordine:

E7 $\forall a\ \forall b\ (a \leq b \text{ e } b \leq a\ \Rightarrow\ a = b)$

Il nostro ambiente di partenza è un insieme ordinato, denso e privo di elementi massimali e minimali. Quest'ultimo fatto mostra che Whitehead non solo tenta di edificare la geometria senza usare il punto come concetto primitivo, ma esclude anche che tra le regioni ce ne siano alcune che possano giocare il ruolo dei consueti punti geometrici.

Poiché la relazione di inclusione tra regioni è un ordine, è definita la relazione di intersezione della **1.1.8**. Tenendo conto che non esiste una regione minima, si ha:

Definizione 2.1.1. Diremo che due regioni a e b si *intersecano* e scriveremo $a\sigma b$ se esiste una regione c tale che $c\leq a$ e $c\leq b$. Diremo che due regioni a e b sono *separate* e scriveremo $a\delta b$ se non s'intersecano. Diremo *separato* un insieme di regioni A se per ogni coppia di regioni a,b di A si ha $a\delta b$.

Per la relazione di intersezione Whitehead assicura che:

(1) "*l'intersezione, ..., comprende il caso in cui un evento si estende sull'altro*";

(2) "*se ogni intersezione di b è anche intersezione di a, allora o a*K*b, oppure a e b sono identici*".

In proposito, osserviamo che mentre la (1) è banalmente valida, perché se $a\leq b$, allora esiste la regione a tale che $a\leq a$ e $a\leq b$; come mostreremo tra breve, la (2) non discende dagli assiomi sinora considerati. Aggiungiamo, allora, tale condizione alla lista dei nostri assiomi.

E8 $\forall a\, \forall b\, (\forall x\, (x\sigma a \Rightarrow x\sigma b) \Rightarrow a\leq b)$

Naturalmente essendo valida anche l'implicazione inversa, l'assioma **E8** equivale alla formula

$$\forall a\, \forall b\, (\forall x\, (x\sigma a \Rightarrow x\sigma b) \Leftrightarrow a\leq b).$$

Proposizione 2.1.2. Da **E8** segue che

$$a>b \Rightarrow \exists x<a\, (x\delta b).$$

Di conseguenza, dato un modello di **E1**-**E8**, per ogni regione y esiste una regione x separata da y. Inoltre l'assioma **E8** è indipendente dai primi sette.

Dim. Se $a>b$ allora, poiché è falso che $a\leq b$, deve esistere una regione x' tale che $x'\sigma a$ e $x'\delta b$. Detta, allora, x una sottoregione propria sia di x' che di a, risulta $x<a$ e $x\delta b$.
Dato un modello di **E1**-**E8** ed una regione y, sia $a>y$. Per quanto ora dimostrato esiste $x<a$ e $x\delta y$.
Per trovare un modello di **E1**-**E7** che non verifica **E8** è sufficiente considerare modelli in cui tutte le regioni si intersecano: come la classe degli aperti regolari limitati contenenti un punto P. Allora, la verifica dei primi sette assiomi è banale, così come è evidente che **E8** non è verificato.

□

L'assioma **E8** asserisce che se la nozione di intersezione è definita tramite quella di inclusione, sarebbe possibile anche il contrario. Da notare che Whitehead in

Processo e Realtà proporrà una definizione di inclusione di tale tipo partendo non dalla nozione di intersezione ma da quella, analoga, di connessione.

Un'analisi più accurata di **E8** ed **E3** rivela che essi sono in qualche modo legati. In effetti, è lampante che **E8** esprima una condizione più forte di **E3**. Con la **2.1.3** proveremo che nel sistema di assiomi **E1-E8**, **E3** dipende dai rimanenti.

Modifichiamo, allora, la lista di assiomi sostituendo **E3** con **E8**:

E′ 1 $\forall a\ (a \leq a)$

E′ 2 $\forall b\ \exists a\ \exists c\ (a<b<c)$

E′ 3 $\forall a\ \forall b\ (\forall x\ (x\sigma a \Rightarrow x\sigma b) \Rightarrow a\leq b)$

E′ 4 $\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a\leq b \text{ e } b\leq c) \Rightarrow a\leq c)$

E′ 5 $\forall a\ \forall c\ (a<c \Rightarrow \exists b\ (a<b<c))$

E′ 6 $\forall a\ \forall b\ \exists c\ (a\leq c \text{ e } b\leq c)$

E′ 7 $\forall a\ \forall b\ (a\leq b \text{ e } b\leq a \Rightarrow a = b)$

Si osserva che il sistema di assiomi **E1-E8** è banalmente equivalente a **E′ 1-E′ 7**.

Proposizione 2.1.3. Nel sistema di assiomi **E′ 1-E′ 7** si ha

$$\forall a\ \forall b\ (\forall x\ (x<a \Rightarrow x<b) \Rightarrow a\leq b)$$

Dim. Considerate due regioni a e b, supponiamo per ipotesi che ogni parte propria di a lo sia anche di b. Se per assurdo fosse $a\not\leq b$, per **E′ 3** esisterebbe una regione y tale che $y\sigma a$ ma $y\delta b$. Detta, allora, z una sottoregione propria sia di a che di y, risulta $z<a$ e $z\delta b$, contro le ipotesi.

□

2.2 Regioni sfumate ed assiomi di Whitehead: la classe degli insiemi fuzzy

L'esempio fornito nella **2.1.2** per provare l'indipendenza di **E8** dai rimanenti assiomi, anche se semplice ed efficace, può apparire un po' banale, perché si basa sul fatto che la relazione di intersezione è verificata per tutte le coppie di regioni. Ne proponiamo, allora, uno che a nostro parere è anche più elegante. Esso si basa sulla nozione di "insieme fuzzy" (*fuzzy set*) che ci apprestiamo a fornire.

Definizione 2.2.1. [Zadeh (1965)] Sia S un insieme e $(U,\leq,0,1)$ un insieme ordinato con elemento massimo 1 e elemento minimo 0. Chiameremo *sottoinsieme fuzzy* di S ogni funzione $s : S \rightarrow U$. Diremo che s è *crisp* se $s(x)\in\{0,1\}$ per ogni $x\in S$

Il valore $s(x)$ è da interpretarsi come il grado di appartenenza di x ad S, pertanto i valori 0 e 1 rappresentano il *vero* e il *falso*. La classe dei sottoinsiemi fuzzy, che ovviamente coincide con U^S, la indicheremo con $\mathcal{F}(S)$. In tale insieme è possibile definire una relazione d'inclusione $\subseteq$, ponendo, per ogni $x\in S$,

$$s \subseteq s' \;\Leftrightarrow_{def}\; s(x) \leq s'(x)$$

È evidente che $\mathcal{P}(S)$, l'insieme delle parti di S, coincide con la classe dei sottoinsiemi fuzzy "crisps" di S. Più precisamente, è possibile identificare ogni $A \in \mathcal{P}(S)$ con la sua funzione caratteristica c_A. In particolare, identificheremo $\emptyset$ con la funzione s^o costantemente uguale a zero e S con la funzione s^1 costantemente uguale a 1.

Definizione 2.2.2. Dato $s \in \mathcal{F}(S)$ e $\lambda \in U$, diremo λ-*taglio aperto* di s il sottoinsieme classico di S

$$O(s,\lambda) = \{x \in S : s(x) > \lambda\}$$

Poiché $s(x) = \sup\{\lambda \in U : x \in O(s,\lambda)\}$, ogni $s \in \mathcal{F}(S)$ è caratterizzato dalla famiglia dei suoi tagli. Inoltre, detto *supporto* di s, e indicato con $\mathrm{Supp}(s)$, l'insieme

$$\{x \in S : s(x) \neq 0\}$$

è evidente che $O(s,0) = \mathrm{Supp}(s)$ e $O(s,1) = \emptyset$.

In accordo con tale teoria, scegliamo $S = \mathbb{R}^3$ e $U = [0,1]$, e indichiamo con $\mathcal{F}^*(\mathbb{R}^3)$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ con supporto limitato.

Proposizione 2.2.3. $(\mathcal{F}^*(\mathbb{R}^3) - \{s^o\}, \subseteq)$ è un modello di **E1**-**E7** che non verifica **E8**.

Dim. La verifica di **E1**, **E4**, **E7** è banale. Per provare **E2**, osserviamo che ogni fuzzy set s non vuoto contiene propriamente il fuzzy set $s/2$. Per provare **E5** basta osservare che se s_1 è contenuto propriamente in s_2 allora $(s_1+s_2)/2$ si colloca propriamente tra s_1 e s_2. Per provare **E6** basta notare che per ogni coppia (s, t) il fuzzy set

$$z(x) =_{def} \max\{s(x), t(x)\}$$

possiede i requisiti richiesti. Al fine di provare **E3**, dimostreremo che se $s \not\subseteq t$ allora esiste $z \subset s$ e $z \not\subset t$. Osserviamo che $z \subset s$ significa $z \subseteq s$ e $z \neq s$, e cioè che esiste $x \in \mathbb{R}^3$ tale che $z(x) < s(x)$. Ora da $s \not\subseteq t$ segue che esiste $y \in \mathbb{R}^3$ tale che $s(y) > t(y)$, e per la densità di $[0,1]$ esiste $a \in [0,1]$ tale che $s(y) > a > t(y)$. Consideriamo, allora, il sottoinsieme fuzzy $z(x)$ che coincide con $s(x)$ se $x \neq y$ ed assume il valore a in y. È banale verificare che z soddisfa la tesi.
Per provare che **E8** non è verificato, osserviamo che

$$\forall w,w' \in \mathcal{F}^*(\mathbb{R}^3) - \{s^o\} \quad (\, w \text{ interseca } w' \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Supp}(w) \cap \mathrm{Supp}(w') \neq \emptyset\,).$$

Consideriamo le due sfere "fuzzy" s e t definite al seguente modo:

$$s(x,y,z) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{se } x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad t(x,y,z) = \begin{cases} 0{,}7 & \text{se } x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo Supp(t) $\subset$ Supp(s) è ovvio che non è possibile intersecare t senza intersecare s, tuttavia $t \not\subseteq s$.

□

2.3 Dissezioni

Whitehead propone la seguente interessante nozione di "dissezione":

> "*Una dissezione di un evento è un insieme separato tale che l'insieme delle intersezioni dei suoi membri coincide con l'insieme delle intersezioni dell'evento.*"

Formalmente si ha:

Definizione 2.3.1. Chiameremo *dissezione* di una regione a un insieme di regioni D tale che:

(i) $\forall x \in \mathrm{D}\ \ \forall y \in \mathrm{D}\ \ (x \neq y\ \Rightarrow\ x\delta y)$;

(ii) $\forall x\ ((\exists d \in \mathrm{D}\ \ x\sigma d)\ \Leftrightarrow\ x\sigma a)$.

La nozione di dissezione è strettamente collegata con quella, da un punto di vista matematico più elegante, di partizione. Non è difficile, infatti, provare il seguente teorema.

Teorema 2.3.2. Per ogni regione a, se D è una dissezione di a allora D è una partizione di a.

Dim. Basta provare che da (ii) segue a = sup(D). Da (ii) segue, grazie a **E′ 3**, che $d \leq a$ $\forall d \in \mathrm{D}$, e cioè che a è un maggiorante di D. Supponiamo, poi, per assurdo che a non sia il minimo dei maggioranti, e cioè che esista un maggiorante m di D tale che $m \not\geq a$. Esisterebbe, allora, una regione x tale che $x\sigma a$ ma non è vero che $x\sigma m$. Ora, per (ii), $x\sigma a$ implica l'esistenza di un $y \in \mathrm{D}$ tale che $x\sigma y$, in contrasto con il fatto che non è $x\sigma m$.

□

Più problematico è l'inverso di tale teorema, e non è chiaro se gli assiomi proposti siano sufficienti a provare che ogni partizione D di a sia anche una dissezione di a. Il punto cruciale è se è vero che l'estremo superiore di una famiglia di regioni separate da una regione x è ancora separato da x.
Col seguente teorema si cerca di esibire una condizione che permetterebbe di fornire una risposta positiva a tale problema.

Teorema 2.3.3. Supponiamo che in (M,$\leq$) esista, per ogni a e b tali che $a \not\leq b$, la regione a-b univocamente definita[2] dalla seguente proprietà:

[2] La proprietà considerata definisce la regione a-b elencandone le parti, e per **2.1.3**, se due regioni sono distinte allora i rispettivi insiemi delle parti non possono coincidere.

$$\forall a \, \forall b \, (\forall x \, (x \leq a\text{-}b \;\Leftrightarrow\; x \leq a \text{ e } x\delta b)).$$

Allora, se D è una partizione di a, D è una dissezione di a.

Dim. Da a = sup(D) segue $d \leq a$ per ogni $d \in$D, e quindi intersecare un elemento di D equivale a intersecare a. Supponiamo poi, per assurdo, che esista una regione x che interseca a ma separata da ogni elemento $d \in$D. Considerata una regione y comune ad a e ad x, si nota che è $a \not\leq y$ (altrimenti y intersecherebbe ogni $d \in$D, mentre y è parte di x che è separato da ogni $d \in$D), è quindi possibile considerare la regione a-y. Ora dalla proprietà che definisce a-y, scegliendo $x = a\text{-}y$ si ricava $a\text{-}y \leq a$ e $a\text{-}y \; \delta \; b$; inoltre, essendo per ogni $d \in$D $d \leq a$ e $d\delta y$, si ha $d \leq a\text{-}y$ per ogni $d \in$D. In sintesi, a-y sarebbe un maggiorante di D strettamente minore di a, contro le ipotesi.

□

È immediato verificare che ogni regione a ammette come dissezione la classe D = $\{a\}$. Chiameremo *propria* ogni dissezione diversa da essa e indicheremo con $\Pi(a)$ l'insieme delle dissezioni di a. Vale, inoltre, la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.4. Se $a \neq b$, allora $\Pi(a) \cap \Pi(b) = \emptyset$. Inoltre, $\{a\}$ è l'unica dissezione di a costituita da un solo elemento.

Dim. Se D fosse allo stesso tempo dissezione di a e di b, per ogni c tale che $c\sigma a$ esisterebbe un $z \in$D tale che $c\sigma z$, ed essendo D dissezione di b, seguirebbe $c\sigma b$. Abbiamo, in pratica, mostrato che per ogni c da $c\sigma a$ segue $c\sigma b$, e ciò, per **E′ 3**, significa $a \leq b$. Simmetricamente si prova che $b \leq a$.
Proviamo la seconda parte dell'altro asserto: se fosse $\{b\} \in \Pi(a)$, per ogni c sarebbe $c\sigma b$ se e solo se $c\sigma a$, e per **E′ 3** si avrebbe $a \leq b$ e $b \leq a$, e quindi $a = b$.

□

Riferendosi, poi, alla nozione di dissezione, Whitehead dichiara:

(3) "*Per un evento dato esisterà sempre un numero infinito di dissezioni*";

(4) "S*e a*K*b esistono delle dissezioni di a di cui b è membro*";

(5) "*se b è una parte di a, esistono sempre degli eventi separati da b che sono anche parti di a*";

Abbiamo già visto, con la **2.1.2**, che (5) è conseguenza di **E1**-**E8** (equivalentemente di **E′ 1**-**E′ 7**). Vale inoltre la seguente

Proposizione 2.3.5. L'asserzione (3) è conseguenza di (4) e di **E′ 1**-**E′ 7**.

Dim. Presa la regione a, per **E′ 2** esiste $a_1 < a$ e per (4) esiste $D_1 \in \Pi(a)$ contenente a_1. Ancora per **E′ 2** esiste $a_2 < a_1$, e per transitività è $a_2 < a$. Per (4) esiste un $D_2 \in \Pi(a)$ contenente a_2, e per **E′ 2** un $a_3 < a_2$. Si ha $a_3 < a$, e quindi esiste un $D_3 \in \Pi(a)$ contenente a_3. È evidente che tale processo non ha fine: possiamo perciò costruirci infinite dissezioni di a.

Dimostreremo ora che le dissezioni trovate sono addirittura tutte diverse tra loro. Ci basterà provare che ogni dissezione è diversa da quelle che la seguono. Tenendo presente che $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, si nota facilmente che $a_1 \notin D_2$, e quindi $D_1 \neq D_2$; ma è anche $a_1 \notin D_3$, il che implica $D_1 \neq D_3$; in tal modo si ha $a_1 \notin D_i$ per ogni $i>1$, e quindi $D_1 \neq D_i$ per ogni $i>1$. Analogamente $a_2 \notin D_i$ per ogni $i>2$ e quindi $D_2 \neq D_i$ per ogni $i>2$. E così via.

□

Un po' più complicata è la dimostrazione della (4), per la quale sembra necessario l'uso dell'*assioma della scelta* nella versione del *Lemma di Zorn*.

Proposizione 2.3.6. $b \leq a \;\Rightarrow\; \exists D \in \Pi(a) : b \in D$

Dim. Supposto $b \leq a$, consideriamo la classe d'insiemi

$$S = \{X : \; a \in X, \;\; x\delta y \;\; \forall x,y \in X, \;\; w \leq b \;\; \forall w \in X\}$$

ordinato dall'inclusione insiemistica. Notato che S è non vuoto perché $\{a\} \in S$, consideriamo una catena C di S e l'oggetto $Z = \cup_{X \in C} X$. Che Z sia un maggiorante di C è ovvio, proviamo che Z è un elemento di S.

1) $a \in Z$ perché $a \in X$ per ogni $X \in C$;
2) $z \leq b$ per ogni $z \in Z$ perché z appartiene a qualche X;
3) se u e v appartengono a Z allora esistono $U,V \in C$ tali che $u \in U$ e $v \in V$, ma da C catena segue U e V confrontabili. Senza ledere la generalità, possiamo supporre $U \subseteq V$, in tal caso si ha $u,v \in V$ e quindi $u\delta v$.

Per il *Lemma di Zorn*, esiste in S almeno un elemento massimale W. Per provare che W è una dissezione di b contenente a, dobbiamo mostrare che

$$\forall t \, (t\sigma a \;\Rightarrow\; \exists w \in W \;\; (t\sigma w)).$$

Supponiamo, allora, per assurdo che esista una regione t tale che $t\sigma a$ ma t separata da tutti gli elementi di W. Considerata la sottoregione r comune ad a e a t, è facile verificare che $W \cup \{r\}$ è un elemento di S contenente propriamente W, in contrasto con la massimalità di W.

□

2.4 Regioni unite, aggiunte e congiunte

Whitehead definisce la relazione *"essere unite"*, affermando che:

> *"Due eventi x e y si dicono "uniti" quando esiste un terzo evento z tale che:*
>
> *(i) z interseca sia x sia y,*
>
> *(ii) esiste una dissezione di z di cui ogni membro è una parte di x o di y o di entrambi."*

Tale relazione sembra rappresentare la moderna relazione di "sovrapposizione o contatto". In formule abbiamo:

Definizione 2.4.1. Diremo che due regioni a e b sono *unite* se esiste una regione c tale che:

(i) $c\sigma a$ e $c\sigma b$;

(ii) $\exists D\in\Pi(c)$ $(x\in D \Rightarrow x\leq a$ oppure $x\leq b)$.

Regioni che s'intersecano sono unite. Infatti, se a e b s'intersecano, esiste una regione z che è parte sia di a che di b; scelto $c = z$, c soddisfa la (i). Infine $D = \{c\}$ è una dissezione di c che soddisfa la (ii).

Da questa definizione, è evidente che l'idea di regione di Whitehead presuppone la connessione, altrimenti due regioni qualsiasi sarebbero unite. Pertanto, da questo punto in poi, per "regione" intenderemo "regione connessa".

Poco più avanti, Whitehead spiega che:

> *"Tra due eventi uniti la relazione di unione è necessaria per l'esistenza di un evento che si estenda sopra di essi ma non sopra alcun evento estraneo";*

In termini matematici, ciò significa ammettere l'esistenza dell'estremo superiore per ogni coppia di regioni unite; ma approfondiremo meglio la questione nel paragrafo **2.8.** Ora ci limitiamo a definire altre due relazioni, quelle che Whitehead chiama di *aggiunzione* e di *congiunzione*:

Definizione 2.4.2. Diremo che due regioni a e b sono *aggiunte* se sono separate ma unite. Diremo che una regione a è *congiunta* ad una regione b se a è parte di b ed è possibile aggiungersi ad a senza intersecare b.

2.5 Classi astrattive

Nella teoria di Whitehead gioca un ruolo fondamentale la nozione di "*classe astrattiva*".

Definizione 2.5.1. Chiameremo "*classe astrattiva*" un insieme di regioni A se:

(i) A è totalmente ordinato rispetto a $<$;

(ii) non esiste una regione contenuta in tutte le regioni di A.

Le proprietà (i) e (ii) equivalgono a dire che una classe astrattiva è una *catena senza minoranti*. In seguito, il simbolo $\mathcal{CA}$ indicherà l'insieme delle classi astrattive.

Definizione 2.5.2. Diremo che una classe astrattiva B *copre* un'altra classe astrattiva A e scriveremo $A\preccurlyeq B$ quando ogni membro di B contiene un membro (e quindi infiniti membri) di A. In simboli:

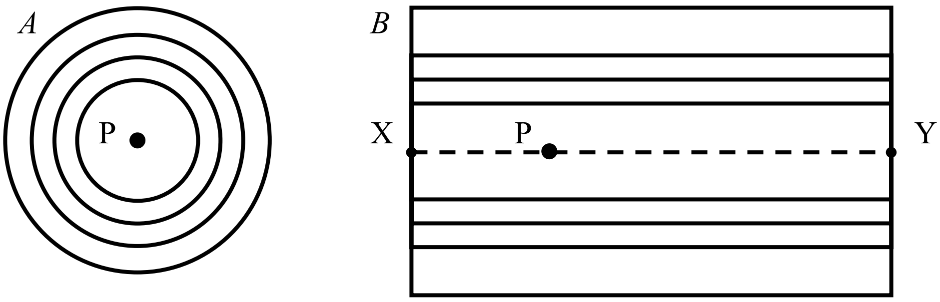
$$A\preccurlyeq B \ \Leftrightarrow_{def} \ \forall b\in B \ \exists a\in A \ : a\leq b.$$

La relazione di copertura è un preordine in $\mathcal{CA}$, infatti:

(riflessività): essendo A totalmente ordinata da $<$, si ha che per ogni $x\in A$ esiste $y\in A$ tale che $x\leq y$, basta prendere $x = y$.

(transitività): da $B \preccurlyeq C$ e $A \preccurlyeq B$ segue che per ogni $c \in C$ esiste $b \in B$ tale che $b \leq c$, e per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $a \leq b$. Per transitività, si ha la tesi.

Esempio. Consideriamo (nel piano) le classi astrattive in figura A e B, dove A è la successione di cerchi di centro P e raggio 1/n, mentre B è la successione di rettangoli con un lato fisso e l'altro di misura 1/n. È evidente che A converge al punto P, mentre B converge al segmento XY. È chiaro inoltre che B copre A, in quanto ogni rettangolo di B contiene qualche cerchio di centro P.

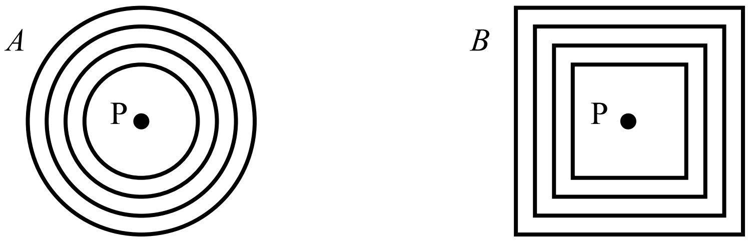


Come già osservato nel primo capitolo è possibile associare a tale preordine una relazione di equivalenza e quindi un opportuno spazio quoziente, e questo è proprio ciò che fa Whitehead.

Definizione 2.5.3. Diremo che due classi astrattive A e B sono *equivalenti* e scriveremo $A \equiv B$ se si coprono a vicenda. In simboli:

$$A \equiv B \quad \Leftrightarrow_{def} \quad A \preccurlyeq B \text{ e } B \preccurlyeq A.$$

Esempio. Le classi astrattive A e B sono equivalenti, in quanto ogni cerchio contiene un quadrato di centro P, e ogni quadrato contiene un cerchio di centro P.



La relazione $\equiv$ è d'equivalenza e determina lo spazio quoziente $C\mathcal{A}/\equiv$. Su tale insieme è definita la seguente relazione

$$[A] \preccurlyeq [B] \quad \Leftrightarrow_{def} \quad A \preccurlyeq B$$

che è anche antisimmetrica, e quindi un ordine.

Osservazione 2.5.4. Se $B \subseteq A$, allora $A \equiv B$ (l'implicazione inversa non vale).

Dim. <u>Proviamo che $A \preccurlyeq B$</u>: $B \subseteq A$ significa che per ogni $b \in B$ si ha $b \in A$. È, quindi, facile trovare per ogni $b \in B$ un $a \in A$ tale che $a \leq b$, basta prendere $a = b$.

<u>Proviamo che $B \preccurlyeq A$</u>: supponiamo, per assurdo, che esista $a \in A$ per il quale non sia possibile trovare un $b \in B$ tale che $b \leq a$. Ricordando che $B \subseteq A$, si ha che a e b sono elementi della catena A, e di conseguenza $b > a$ per ogni $b \in B$. Pertanto a è un minorante della classe astrattiva B, il che è assurdo.

Per vedere che l'implicazione inversa non vale, basta considerare la classe astrattiva dei cubi concentrici di centro un punto P e la classe astrattiva delle sfere concentriche di centro P. Le due classi sono equivalenti, ma non hanno alcuna regione in comune.

□

A questo punto, Whitehead, introduce i concetti di "prima" e "antiprima", che userà per definire gli "elementi astratti".

> *"Una classe astrattiva è detta "prima (antiprima) rispetto alla condizione formativa s quando:*
>
> *(i) soddisfa s;*
>
> *(ii) è coperta da (copre) ogni altra classe che soddisfa s."*

Non è completamente chiaro che cosa intenda per "condizione formativa" e l'intera teoria che ne segue è ancora da formalizzare in modo adeguato. In questa tesi supporremo che "condizione formativa" debba essere intesa come proprietà definita in $\mathcal{CA}$. In pratica è come se ci restringessimo alle condizioni del tipo

" essere una classe astrattiva tale che…".

In ogni caso, Whitehead fa notare che se A e B sono s-prime (s-antiprime), allora sono equivalenti, perché in base alla (ii) devono coprirsi l'un l'altra.

Individua, poi, nell'insieme delle condizioni formative, il sottoinsieme delle condizioni "regolari", specificando che:

> *"Una condizione formativa s sarà detta regolare per classi prime (antiprime) quando:*
>
> *(i) esistono delle s-prime (s-antiprime);*
>
> *(ii) l'insieme delle classi astrattive equivalenti ad una qualsiasi s-prima (antiprima) coincide con l'insieme completo delle s-prime (s-antiprime)."*

In termini matematici si ha:

Definizione 2.5.5. Sia s una proprietà definita in $\mathcal{CA}$, allora diremo che $A \in \mathcal{CA}$ è "*prima*[3] rispetto ad s " se è un minimo dell'insieme $(\{X \in \mathcal{CA} : X \text{ soddisfa } s\}, \preccurlyeq)$.

[3] Il concetto di *antiprima* è stato trascurato perché non troverebbe collocazione nel nostro discorso, vedi **2.6.2**.

Due s-prime sono equivalenti perché entrambe minimi di un insieme preordinato.

Definizione 2.5.6. Diremo che una proprietà s è *regolare per classi prime* quando:

(i) esiste una s-prima;

(ii) se A è s-prima, allora $B \equiv A$ implica B s-prima.

La (ii) significa che la proprietà "essere s-prima" si conserva per equivalenza.

Esempio. In uno spazio euclideo tridimensionale, una proprietà non regolare è:

$$s_1 = \textit{essere costituita da cubi aperti contenenti il punto P}$$

Infatti, la classe astrattiva C dei cubi concentrici in P è s_1-prima, ed è equivalente alla classe astrattiva S delle sfere aperte concentriche in P, ma S non è una s_1-prima, perché non soddisfa s_1.

Come esempio di proprietà regolare, data una classe astrattiva A, consideriamo

$$s_A = \textit{coprire } A$$

In primo luogo, esiste una s_A-prima ed è A; banalmente, infatti, A soddisfa s_A ed è coperta da tutte le classi che anche vi soddisfano. In secondo luogo, se B è s_A-prima e $C \equiv B$, allora C è s_A-prima. Il tutto deriva dalla transitività della relazione di copertura, infatti: B s_A-prima vuol dire che (i) B copre A e (ii) se Y copre A, allora Y copre B. Da $C \succcurlyeq B$ e (i) segue che C copre A; da $C \preccurlyeq B$ e (ii) segue che: se Y copre A, allora Y copre C. Pertanto C è s_A-prima.

2.6 Elementi astratti

Whitehead dà la seguente definizione di "elemento astratto finito e infinito":

> "*L'elemento astratto finito (infinito) dedotto dalla condizione formativa s è l'insieme di quegli eventi che sono membri di classi s-prime (s-antiprime), con s condizione regolare per le prime. Gli elementi astratti sono rappresentati dall'insieme degli elementi astratti finiti e infiniti.*"

Formalmente, per gli elementi astratti finiti, si ha la seguente

Definizione 2.6.1. Diremo *elemento astratto finito* dedotto dalla proprietà s l'insieme $\varepsilon = \{x \in X : X\ s\text{-prima, con } s \text{ regolare per classi prime}\}$.

Diremo che due proprietà regolari *si equivalgono* se soddisfare l'una equivale a soddisfare l'altra. Evidentemente, proprietà regolari equivalenti definiscono lo stesso elemento astratto.

Nota 2.6.2. Whitehead dice che esempi di antiprime sono le classi astrattive che hanno per membri quegli eventi che prendono il nome di **durata**, e spiega che

> *"...si potrebbe immaginare la durata come una specie di* ***spessore temporale*** *(una fetta)* ***di natura****."*

In altre parole, la durata è "tutto ciò che *è* in un certo intervallo di tempo" (si noti che la durata è tetradimensionale). Una classe astrattiva formata da durate è

> "*…una serie di spessori temporali racchiusi successivamente l'uno dentro l'altro e convergenti verso* ***l'ideale che non ha spessore****…*",

tale ente ideale si chiama **momento**, è un elemento astratto infinito, e

> "*…rappresenta la natura che ha perduto la sua (essenziale) estensione temporale…*".

In pratica un momento è "tutto ciò che *è* in un certo istante"[4]. Allora, sembrerebbe che il nostro spazio tridimensionale non sia altro che lo spazio di un sistema tetradimensionale in un suo momento (istante). Ciò spiega perché le antiprime e gli elementi astratti infiniti non trovano riscontro in un ambiente, quale il nostro, privo della dimensione temporale.

L'insieme degli elementi astratti sarà indicato con $\mathcal{EA}$ e coinciderà con l'insieme degli elementi astratti finiti. Pertanto, il termine "elemento astratto" significherà "elemento astratto finito".[5]

Introduciamo, ora, in $\mathcal{EA}$ la relazione $\preccurlyeq$, che chiameremo ancora "copertura":

Definizione 2.6.3. Diremo che un elemento astratto ε_2 *copre* un elemento astratto ε_1 e scriveremo $\varepsilon_1 \preccurlyeq \varepsilon_2$ se ogni regione di ε_2 contiene una regione di ε_1. In simboli:

$$\varepsilon_1 \preccurlyeq \varepsilon_2 \Leftrightarrow_{def} \forall x\in\varepsilon_2 \ \exists y\in\varepsilon_1 : y\leq x$$

Tale relazione è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi un ordine; ma non lo proveremo: dimostreremo molto di più.

Osservazione 2.6.4. La relazione di copertura tra elementi astratti coincide con l'inclusione insiemistica. In simboli:

$$\varepsilon_1 \preccurlyeq \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \supseteq \varepsilon_2$$

Dim. ($\Leftarrow$): $\varepsilon_1 \supseteq \varepsilon_2$ significa che per ogni $x\in\varepsilon_2$ si ha $x\in\varepsilon_1$. Allora, per ogni $x\in\varepsilon_2$ è facile trovare un elemento $y\in\varepsilon_1$ tale che $y\leq x$, basta prendere $y = x$.
Viceversa ($\Rightarrow$): preso un generico x di ε_2, per ipotesi esiste $y\in\varepsilon_1$ tale che $y\leq x$. Esiste, inoltre, una proprietà s_1 regolare per classi prime da cui è dedotto ε_1. Allora, $y\in\varepsilon_1$ vuol dire che y appartiene ad una classe astrattiva Y che è s_1-prima. La classe astrattiva Y_x, ottenuta da Y eliminando y e tutte le regioni che la precedono (Y è una catena) e aggiungendo x, è ancora equivalente a Y, e quindi s_1-prima. Di conseguenza le regioni di Y_x appartengono a ε_1, in particolare $x\in\varepsilon_1$.

---

[4] Whitehead approfondisce molto la questione, prendendo in considerazione anche l'ipotesi che esistano diversi sistemi temporali.

[5] La situazione è ben schematizzata dalla seguente catena d'implicazioni:
fare a meno della dimensione temporale $\Rightarrow$ regioni invece di eventi $\Rightarrow$ niente classi astrattive antiprime e quindi inutile dare la definizione di antiprima $\Rightarrow$ niente elementi astratti infiniti.

□

Osserviamo, ora, che con la **2.6.1** Whitehead definisce l'elemento astratto come un insieme di regioni associato ad una particolare proprietà, e non, come sarebbe naturale da un punto di vista della matematica attuale e come farà poi in *Processo e realtà*, come classe d'equivalenza completa modulo ≡. Tuttavia, come speravamo, esiste un forte legame tra le strutture $(\mathcal{CA}/\equiv, \preccurlyeq)$ e $(\mathcal{EA}, \preccurlyeq)$.

Proposizione 2.6.5. La corrispondenza

$$f : [A] \in \mathcal{CA}/\equiv \ \rightarrow \ \varepsilon_A = \{x \in X : X\ s_A\text{-prima, con } s_A = \text{“coprire } A\text{”}\} \in \mathcal{EA}$$

è una similitudine di $(\mathcal{CA}/\equiv, \preccurlyeq)$ in $(\mathcal{EA}, \preccurlyeq)$.

Dim. <u>f è ben definita</u>: dobbiamo provare che $f([A])$: (i) non dipende dal rappresentante (non dipende da A), e (ii) è un elemento di $\mathcal{EA}$.

(i): sia $[A] = [B]$, allora $A \equiv B$, e di conseguenza "coprire A" significa "coprire B". Segue che le proprietà s_A e s_B si equivalgono, e definiscono lo stesso elemento astratto. (Equivalentemente, avremmo potuto definire f ponendo s_A = "coprire un elemento di $[A]$").

(ii): basta ricordare che la proprietà s_A è regolare per classi prime.

<u>f è iniettiva</u>: siano $[A],[B] \in \mathcal{CA}/\equiv$ tali che $f([A]) = f([B])$, si ha $\{x \in X : X\ s_A\text{-prima, con } s_A = \text{“coprire } A\text{”}\} = f([A]) = f([B]) = \{y \in Y : Y\ s_B\text{-prima, con } s_B = \text{“coprire } B\text{”}\}$. Ora, se $a \in A$, allora $a \in f([A])$, e quindi $a \in f([B])$. Pertanto, esiste Y s_B-prima tale che $a \in Y$. Ma Y copre B, e quindi a si estende su qualche regione di B. Questo vale per ogni $a \in A$, il che significa che A copre B. Simmetricamente, B copre A, e quindi $[A] = [B]$.

<u>f è suriettiva</u>: prendiamo un elemento ε di $\mathcal{EA}$. Si ha che $\varepsilon = \{x \in X : X\ s_o\text{-prima, con } s_o \text{ regolare per classi prime}\}$. Ora, s_o regolare per classi prime significa che:

(i) esiste una classe astrattiva X s_o-prima;

(ii) la classe d'equivalenza completa di X coincide con la classe d'equivalenza completa delle s_o-prime.

Associamo, pertanto, univocamente ad ε l'elemento $[X]$ di $\mathcal{CA}/\equiv$.

<u>f conserva l'ordine</u>: posto $f([A]) = \varepsilon_A$, bisogna provare che $[A] \prec [B] \Leftrightarrow \varepsilon_A \prec \varepsilon_B$, dove le due relazioni indicate con $\prec$ sono quelle di ordine stretto associate alle rispettive relazioni di copertura.

Proviamo (⇒), ovvero: preso un qualsiasi $x \in \varepsilon_B$, se $[A] \prec [B]$, allora esiste $y \in \varepsilon_A$ tale che $y \leq x$, ma $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$. Notiamo innanzitutto che $[A] \prec [B]$ significa $[A] \preccurlyeq [B]$ ma $[A] \neq [B]$, da cui segue $A \preccurlyeq B$ ma $A \neq B$. Consideriamo, poi, un generico $x \in \varepsilon_B$, questo significa che esiste una classe Z s_B-prima a cui x appartiene. Essendo $Z \equiv B$ e $A \preccurlyeq B$ si ha che $A \preccurlyeq Z$, pertanto esiste $y \in A$, e quindi anche a ε_A, tale che $y \leq x$.

Provare, infine, che $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$, è banale perché da $[A]<[B]$ segue $[A] \neq [B]$, e per iniettività è $f([A]) \neq f([B])$, ovvero $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$.
Viceversa ($\Leftarrow$), supposto $\varepsilon_A \prec \varepsilon_B$, mostriamo che $A \preccurlyeq B$ ma $[A] \neq [B]$. Considerato un generico $y \in B$, segue che $y \in \varepsilon_B$, ma per ipotesi $\varepsilon_A \prec \varepsilon_B$, esiste quindi $x \in \varepsilon_A$ tale che $x \leq y$, ma $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$. Ora, $x \in \varepsilon_A$ implica che esiste una classe Z s_A-prima a cui appartiene x, ma essendo $Z \equiv A$, ed in particolare $A \preccurlyeq Z$, si ha che esiste $a \in A$ tale che $a \leq x$; infine, per transitività è $a \leq y$.
Infine, da $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$ segue $[A] \neq [B]$, perché f è ben definita.

□

Definizione 2.6.6. Un elemento astratto sarà chiamato *punto* se non copre alcun altro elemento astratto. Un punto è pertanto un elemento minimale dell'insieme ordinato $\mathcal{EA}$. Ritroviamo in questa definizione l'idea di Euclide di *punto come ente senza parti*.

Non sappiamo ancora se esistono punti whiteheadiani, né se nel modello corrispondono proprio ai punti usuali. Nell'attesa di scoprirlo, distingueremo i due concetti chiamando "w-punti" gli eventuali elementi minimali di $\mathcal{EA}$.

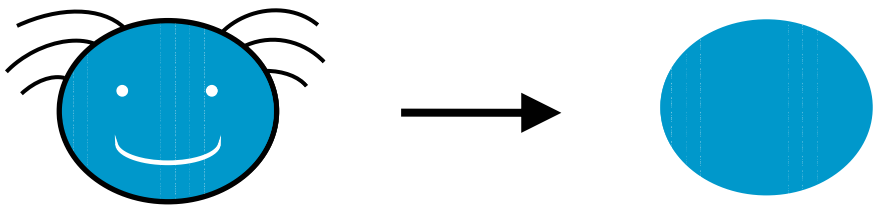
Osserviamo, inoltre, che la similitudine tra $(\mathcal{CA}/\equiv, \preccurlyeq)$ e $(\mathcal{EA}, \preccurlyeq)$, ci autorizza a chiamare "elemento astratto" un elemento di $\mathcal{CA}/\equiv$, e w-punto un suo (eventuale) elemento minimale.

2.7 Consistenza del sistema di assiomi

Come per le geometrie non euclidee, anche la ricerca di modelli di geometria senza punti avverrà all'interno dell'usuale geometria euclidea "con punti". La nostra dimostrazione di non contraddittorietà si basa, quindi, sulla supposta non contraddittorietà della geometria euclidea.

Come modello del sistema di assiomi **E′ 1-E′ 7** abbiamo scelto la classe degli *aperti regolari connessi limitati* e *non vuoti* di uno spazio euclideo.

Motivazioni. Per fissare meglio le idee, e per restare più ancorati all'intuizione del mondo reale, ci limiteremo all'usuale spazio a tre dimensioni. Un primo candidato a rappresentare l'idea di regione potrebbe essere la classe dei chiusi dello spazio euclideo, ma una tale scelta sarebbe insoddisfacente, perché tra i chiusi vi sono anche i punti, le linee e le superfici, che sono enti "poco concreti". Un'altra idea potrebbe essere quella di considerare gli aperti, ma saremmo così obbligati a considerare regioni aperti come il complemento di un punto, di una linea o di una superficie: se, infatti, i punti, le linee e le superfici "non esistono", sembra ragionevole negare l'esistenza di regioni che siano il loro complemento. Inoltre, sarebbe opportuno che la frontiera non avesse un ruolo decisivo nel definire la nozione di regione, perché non tridimensionale. Decidiamo, allora, di servirci di una funzione ρ, detta *regolarizzatore*, che permette di togliere da una regione "pezzi" o "tagli" di dimensione inferiore a quella dello spazio ambiente. Tale funzione ad ogni insieme x dello spazio associa l'interno della chiusura[6] $(x^{-})^{\circ}$, ed è banalmente idempotente.



insieme x non regolare *insieme x regolarizzato*

Diamo, allora, la seguente

Definizione 2.7.1. Diremo *equivalenti* due sottoinsiemi x e y dello spazio euclideo se $\rho(x) = \rho(y)$.

È evidente che:

(i) tutti i punti, le linee e le superfici sono equivalenti all'insieme vuoto;

(ii) in ogni classe di equivalenza esiste uno ed un solo aperto regolare.

Proprio in base alla corrispondenza biunivoca che c'è tra gli aperti regolari e le classi di equivalenza diamo la seguente

Definizione 2.7.2. Chiameremo *regione* ogni classe completa di equivalenza, ovvero ogni aperto regolare dello spazio euclideo.

Passiamo, ora, ad una selezione delle regioni:

- per **E′ 2** sono tenute ad essere non vuote;
- per **E′ 2** ed **E′ 6** devono essere limitate, altrimenti le regioni $a = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\}$ e $b = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x<1\}$ contraddirebbero almeno uno dei due;
- dalla **2.4.1** è chiaro che Whitehead per "regioni" intende i connessi[7].

Indichiamo dunque con $\mathcal{RO}$ la classe degli aperti regolari dello spazio euclideo a tre dimensioni, ordinata rispetto alla relazione d'inclusione $\subseteq$, e con $\mathcal{R}$ il sottoinsieme di $\mathcal{RO}$ costituito dai connessi limitati non vuoti.

Proposizione 2.7.3. Siano $x,y\in\mathcal{R}$ e poniamo

$$x\leq y \iff_{def} x\subseteq y.$$

[6] Con la "chiusura dell'interno" avremmo ottenuto la classe dei chiusi regolari.

[7] Facciamo, però, notare che "restringersi" ai connessi non è essenziale per verificare gli assiomi.

Allora $(\mathcal{R},\leq)$ è un modello del sistema di assiomi **E′ 1**-**E′ 7**, in cui $x\sigma y \Leftrightarrow x\cap y \neq \emptyset$.

Dim. Verificare **E′ 1**, **E′ 4**, **E′ 6** e **E′ 7** è banale.

Per provare **E′ 2**, sia $x\in\mathcal{R}$ e P un punto di x, per **1.5.2** esiste una sfera aperta $a_1\in\mathcal{R}$ di centro P e raggio r tale che $a_1\subseteq x$. La sfera aperta a di centro P e raggio $r/2$ appartiene ancora ad $\mathcal{R}$ ed è tale che $a\subset x$. Poi, essendo x limitata, esiste una sfera aperta $b_1\in\mathcal{R}$ di centro P e raggio r' tale che $x\subseteq b_1$. La sfera b di centro P e raggio $2r'$ appartiene ancora ad $\mathcal{R}$ ed è tale che $x\subset b$.

Proviamo **E′ 5**: sia $x\subset y$ osserviamo che se $x\in\mathcal{R}$, allora esiste un unico x' in $\mathcal{B}$ tale che $x'+x = \mathbb{R}^3$; indicato tale x' con $-x$, notiamo che se $y\in\mathcal{R}$, allora $y \cdot -x$ (ovvero y-x) è un elemento di $\mathcal{R}$. Pertanto, se $x\subset y$, $\{x, y\text{-}x\}$ è una dissezione di y. Ora le regioni x e y-x sono separate, ma la loro somma (+), essendo y, è un connesso. Segue che tali regioni sono in contatto per mezzo di una superficie, che diremo φ. Consideriamo, ora, un punto $P\in\varphi$. Dato che $P\in y$, per **1.5.2** esiste una sfera aperta $b\in\mathcal{R}$ di centro P e raggio r tale che $b\subseteq y$; pertanto la sfera aperta b' di centro P e raggio $r/2$ è tale che $b'\subset y$. Ovviamente $P\in\partial x$, e quindi b' e x s'intersecano, ma $b'\not\subseteq x$. Infine, la regione $b'+x$ appartiene ad $\mathcal{R}$, contiene x ed è contenuta in y.

Per provare **E′ 3**, supponiamo $a\not\subseteq b$. Si ha $a\text{-}b \neq \emptyset$, pertanto preso un punto $P\in a\text{-}b$ per **1.5.2** esiste $x\in\mathcal{R}$ tale che $P\in x$ e $x\subseteq a\text{-}b$. Ciò significa che $x\subseteq a$ e $x\subseteq \text{-}b$, ovvero $x\cap a \neq \emptyset$ e $x\cap b = \emptyset$, che è assurdo.

□

2.8 Problemi senza soluzione

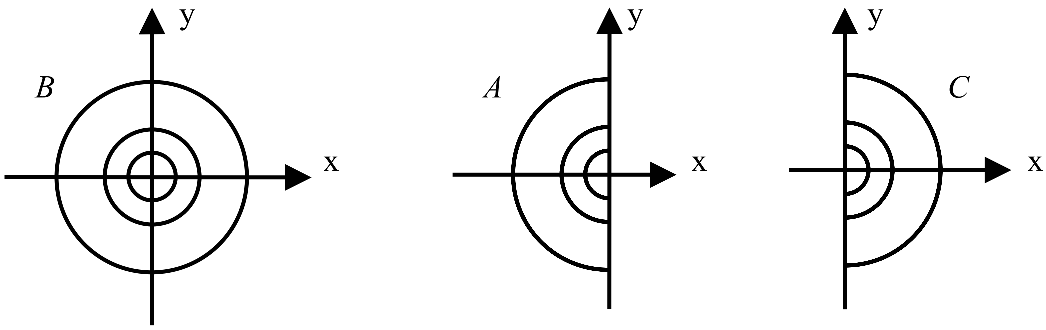
Riferendosi alle classi astrattive, Whitehead precisa che:

> "*Esistono delle classi astrattive la cui parte finale convergente converge verso elementi sulla superficie di uno dei membri della classe. In tal caso, dopo un certo membro x della classe, i membri rimanenti, sopra i quali x si estende, possiedono una qualche forma di contatto interno con il contorno di x. La forma più completa di tale contatto è di essere congiunto in x. Esisteranno tuttavia anche dei tipi più astratti di contatto sia puntuale che lineare, tipi che non abbiamo qui descritto, ma della cui esistenza siamo al corrente sulla base del loro presentarsi in geometria.* […] *Non è certo possibile prendere in considerazione il concetto di contatto puntuale fin tanto che i punti stessi non sono stati definiti.*"

In sintesi: <u>non è possibile contemplare i casi di contatto puntuale e lineare</u> perché semplicemente poco concreti, e di conseguenza "essere aggiunte (congiunte)" significa essere in contatto esterno (interno) per mezzo di superfici. Noi, però, non possiamo condividere questa scelta, perché il nostro scopo è provare la consistenza del sistema di assiomi supponendo consistente la geometria euclidea; il che significa esibire un modello di **E′ 1**-**E′ 7** definito a partire da un usuale spazio euclideo "con

punti”. Nel modello pocanzi esaminato, per quanto riguarda la relazione di aggiunzione, accade proprio ciò che dice Whitehead, e cioè che la somma di due connessi separati *x* e *y* è un connesso se e solo se *x* e *y* sono in contatto per mezzo di superfici. D’altra parte, però, non vediamo alcuna ragione per cui dovremmo trascurare il contatto puntuale e lineare nel caso che due regioni siano congiunte, essendo la congiunzione anche più importante dell’aggiunzione, perché può relazionare le regioni di una classe astrattiva.
Tuttavia, decidere se considerare o no il contatto puntuale e lineare ha poca importanza, perché in entrambi i casi non riusciremmo ad ottenere i risultati sperati. Come mostra l’esempio, già soltanto la possibilità di una “tangenza superficiale interna” (e a maggior ragione l’aggiunta di una tangenza lineare e/o puntuale) fa sì che un punto (e quindi ogni altro elemento geometrico “usuale”) non sia un w-punto.

Esempio. Immaginiamo nel piano le classi astrattive *A*, *B* e *C*, dove *B* è la successione di cerchi aperti con raggio 1/n e centro in (0,0), mentre *A* e *C* sono le successioni di semicerchi aperti che si ottengono tagliando *B* mediante l’asse y. È chiaro che tutte le regioni di *A* sono congiunte tra loro, come pure lo sono, tra loro, le regioni di *C*. Allora, poiché è evidente che *A*, *B* e *C* non sono equivalenti, esse rappresentano elementi astratti differenti. D’altra parte *B*, coprendo sia *A* che *C*, non può rappresentare un w-punto, perché non minimale.



Abbiamo scoperto che i punti usuali, pur essendo elementi di $(\mathcal{EA},\preccurlyeq)$, non sono minimali. Ne segue che un w-punto, se esiste, non corrisponde ad un elemento di $\mathbb{R}^3$, ma a qualcosa di più piccolo. Ritornando all’esempio, si nota che è possibile spezzare in due la classe astrattiva C, ottenendo due classi C_1 e C_2 che sono coperte da C, ma non la coprono. Di conseguenza, C non è minimale; e con lo stesso ragionamento, si prova che neppure C_1 e C_2 lo sono, e così via. Non sembra, pertanto, possibile dedurre l’esistenza di w-punti.

In particolare, ogni punto P esplode in una *nuvola* di nuovi enti che a loro volta riesplodono. L’esempio mostra che la cardinalità di tale nuvola non è inferiore al numero dei versori applicabili al punto P. In pratica, un punto diventa un insieme di elementi di potenza non minore di quella del continuo.

Per metter a fuoco il concetto, immaginiamo un punto usuale P e consideriamo la superficie sferica S di centro P e raggio uno. Applicando a P tutti i possibili versori, possiamo affermare che P si scinde nelle sue parti che sono i punti di S (ma forse non solo!): la “nuvola” è proprio S. Il punto P ha carattere (tri)dimensionale, se ora ruotasse ce ne accorgeremmo. Guardando al microscopio un punto vediamo una superficie sferica, e ingrandendo un punto di tale superficie vediamo ancora una superficie sferica, e così via. Tale cosa, assurda da un punto di vista euclideo, è però molto “naturale”.

2.9 Filtri ed elementi astratti

Il fatto che un eventuale w-punto sarebbe “più piccolo” di un punto usuale, ci ricorda la classe dei “punti” (cioè degli ultrafiltri) che viene a definirsi nella costruzione di Stone. È così che abbiamo ricercato eventuali relazioni tra elementi astratti e filtri, ottenendo però solamente il seguente risultato.

Proposizione 2.9.1. In $(M,\leq)$ ogni elemento astratto è un filtro proprio non principale.

Dim. Proveremo che se $\varepsilon_1 \in \mathcal{EA}$, allora ε_1 verifica (i) e (ii) di **1.2.13**.

(i): se $x\in\varepsilon_1$ allora esiste una classe astrattiva X s_1-prima tale che $x\in X$. Poiché $x\leq y$, l’insieme X_y, ottenuto da X eliminando x e tutte le regioni che la precedono, è ancora una classe astrattiva, ed è equivalente ad X. Ne segue che gli elementi di X_y, ed in particolare y, appartengono ad ε_1.

(ii): se x e y appartengono a ε_1, allora esistono due classi astrattive X e Y entrambe s_1-prime tali che $x\in X$ e $y\in Y$. Chiaramente è $X \equiv Y$, ed in particolare $Y\preccurlyeq X$, il che significa che esiste una regione $a\in Y$ tale che $a\leq x$. Si nota che a e y appartengono entrambe alla catena Y, sono quindi confrontabili.
Se $a>y$, si ha $x\geq a>y$, e preso $z = y$, è $z\in\varepsilon_1$ in quanto elemento di Y.
Se $a = y$, si ha $x\geq y$, e preso $z = y$, è $z\in\varepsilon_1$.
Se $a<y$, si ha $x\geq a<y$, e preso $z = a$, è $z\in\varepsilon_1$.
Infine, se per assurdo, ε_1 fosse principale, esisterebbe una regione $x\leq a$ per ogni $a\in\varepsilon_1$. Ovviamente $x\in\varepsilon_1$, il che assicura l’esistenza di una classe astrattiva X s_1-prima tale che $x\in X$. Segue $x\leq b$ per ogni $b\in X$, che è assurdo, perché X, in quanto classe astrattiva, non ha minoranti. Che sia proprio è banale, perché il nostro dominio è privo di elementi minimali e massimali, e quindi di $\emptyset$ e M.

□

Più problematico è provare il viceversa, cioè che ogni filtro proprio principale coincida con un elemento astratto. Una via per una dimostrazione potrebbe essere la seguente. Supponiamo che F sia un filtro proprio non principale, e sia G una catena massimale in F. Si dovrebbe provare che G è una catena senza minoranti, e quindi una classe astrattiva. Inoltre, detto ε_G (vedi **2.6.5**) l’elemento astratto associato a G, potremmo ipotizzare che $F = \varepsilon_G$.

Riuscendo a provare il viceversa della **2.9.1**, l’*assioma della scelta* assicurerebbe l’esistenza dei w-punti. Infatti, considerando filtri propri non principali gli elementi di $\mathcal{EA}$, per **1.2.14** la struttura $(\mathcal{EA},\subseteq)$ ammette elementi massimali; di conseguenza, per **2.6.4**, $(\mathcal{EA},\preccurlyeq)$ ammette elementi minimali.

2.10 Conclusioni

Le teorie di Whitehead conducono ad un universo in cui ogni punto usuale esplode in più enti geometrici. È ovvio che questo, oltre a sconvolgere radicalmente la geometria euclidea, si allontana anche dagli scopi dell'illustre matematico. L'approccio basato sull'estensione sembra inadeguato per caratterizzare lo spazio affine tridimensionale non meno di quanto lo sono le teorie di Stone (che comunque non hanno mai avuto la pretesa di una interpretazione geometrica). Responsabile di tale inefficienza è forse la natura insiemistica (e non topologica) della relazione assunta come primitiva. D'altronde, questo forse è alla base della scelta successiva di Whitehead che svilupperà, alcuni anni dopo, un nuovo approccio, molto più efficace, basato sulla relazione di connessione.

Chiudiamo questo capitolo facendo notare che Whitehead (1919) potrebbe essere un precursore del concetto di "filtro". Introdotto, infatti, da Henri Cartan nel 1937, una nozione equivalente di filtro, chiamata *net*, risale al 1922 per opera di E. H. Moore e H. L. Smith.

CAPITOLO 3

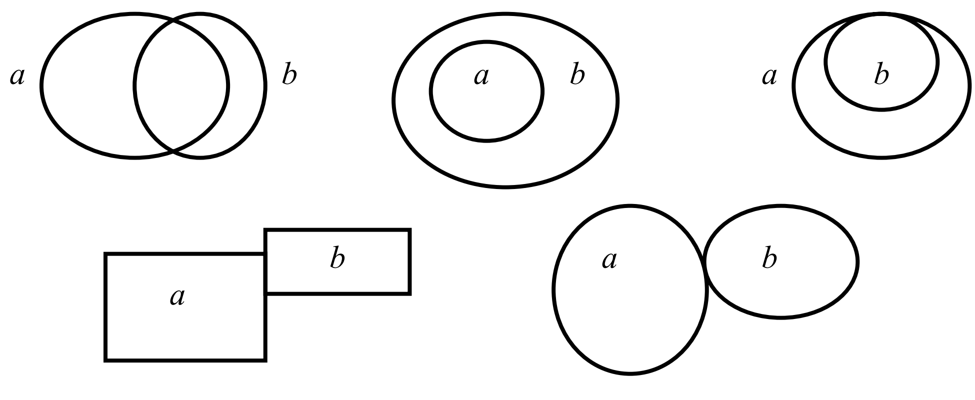
Le strutture di connessione

In questo capitolo cercheremo di fondare una geometria senza punti assumendo come primitivi i concetti di "regione" e "connessione tra regioni". Più precisamente approfondiremo le teorie esposte da Whitehead nei capitoli II e III della parte IV di *Process and reality (1929)*, in cui l'autore elenca numerose assunzioni e definizioni (vedi **Appendice 2**)[8], ma non si preoccupa di individuare un sistema di assiomi che renda possibile un'adeguata trattazione matematica.

3.1 Regioni e contatto tra regioni

Le strutture considerate da Whitehead sono del tipo (M, C), dove M è un insieme i cui elementi chiama *regioni* e C una relazione binaria in M detta *relazione di connessione*. Tale relazione è assunta come primitiva e deriva dal concetto intuitivo "*essere in contatto o sovrapporsi con* ". Chiaramente la relazione di connessione deve essere vista come una relazione topologica e non insiemistica.

Date due regioni x e y, se x è nella relazione C con y, diremo che x è *connessa* ad y e scriveremo $x\mathsf{C}y$. Inoltre chiameremo $\mathsf{C}(x)$ l'insieme $\{y \in M : x\mathsf{C}y\}$ delle regioni con cui x è connessa.



esempi di regioni connesse nel piano

[8] Faremo riferimento all'Appendice 2 tramite le abbreviazioni **W** - **D** - **Def** - **Ass**.

esempi di regioni non connesse

Differentemente dai lavori precedenti, Whitehead considera l'inclusione come nozione derivata definita al modo seguente:

Definizione 3.1.1. Date due regioni x e y, diremo che x è *inclusa* in y e scriveremo $x \leq y$ se $\mathsf{C}(x) \subseteq \mathsf{C}(y)$. Se $x \leq y$ diremo anche che x è una *sottoregione* di y.

La relazione $\leq$ è transitiva perché lo è la relazione $\subseteq$.

Whitehead assume antiriflessiva sia la relazione di connessione (**W4**) che quella d'inclusione (**W7**), spiegando però che tale scelta

"…*è semplicemente un adattamento conveniente della nomenclatura*…".

Al contrario, noi preferiamo, per entrambe le relazioni, la riflessività, perché essendo più conforme all'uso matematico corrente, consente una trattazione più semplice ed elegante. Di conseguenza, assumeremo antisimmetrica la relazione d'inclusione affinché sia un ordine.

Definizione 3.1.2. Date due regioni x e y, diremo che x si *sovrappone* a y e scriveremo $x\mathsf{S}y$ se esiste una regione z tale che $z \leq x$ e $z \leq y$.
Inoltre indicheremo con $\mathsf{S}(x)$ l'insieme $\{y \in M : x\mathsf{S}y\}$ delle regioni a cui x si sovrappone. La relazione S è banalmente riflessiva e simmetrica.

Come mostrato in [Gerla-Tortora (1992)], le prime dodici assunzioni (**W1-W12**) del capitolo II equivalgono ai seguenti sei assiomi:

Il primo assioma asserisce che la relazione di connessione è simmetrica:

A1 $\forall x \forall y \ (x\mathsf{C}y \Rightarrow y\mathsf{C}x)$

Il secondo assioma afferma che non esiste una regione che sia connessa con tutte le altre:

A2 $\forall x \exists y \ \neg(x\mathsf{C}y)$

Il terzo assioma dichiara che due regioni sono sempre *connesse mediatamente*, cioè sono connesse ad una stessa regione:

A3 $\forall x \forall y \exists z \ (x\mathsf{C}z \text{ e } z\mathsf{C}y)$

Il quarto assioma esprime la proprietà riflessiva della relazione di connessione:

A4 $\forall x\ (x\mathsf{C}x)$

Il quinto assioma afferma che la relazione di inclusione gode della proprietà antisimmetrica, (ed è quindi un ordine):

A5 $\forall x\ \forall y\ (x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y)$ [ovvero: $\forall x\ \forall y\ (\mathsf{C}(x) = \mathsf{C}(y) \Rightarrow x = y)$]

Il sesto assioma asserisce che in ogni regione sono contenute almeno due regioni tra loro non connesse:

A6 $\forall z\ \exists x \leq z\ \exists y \leq z\ \neg(x\mathsf{C}y)$

Si osserva che la relazione C non è transitiva, perché, se lo fosse, da **A3** seguirebbe che due regioni qualsiasi sono connesse, in contrasto con **A2**.

Nota 3.1.3. Se x e y sono tali che $\neg(x\mathsf{C}y)$, per **A4** non possono coincidere, e allora, in **A6** non possono essere entrambi uguali a z; se ne deduce che *ogni regione contiene propriamente un'altra regione*. Pertanto la struttura ordinata $(M,\leq)$ non contiene elementi minimali. Ma nemmeno massimali: è, infatti, facile provare che una regione contiene tutte le altre se e solo se è connessa con tutte le altre.
In particolare, vogliamo far notare che come, nel capitolo due, non solo tenteremo di edificare la geometria senza usare il punto come concetto primitivo, ma è escluso anche che tra le regioni ce ne siano alcune che possano giocare il ruolo dei consueti punti geometrici.

Proposizione 3.1.4. Siano x, y e z regioni arbitrarie, valgono le seguenti proprietà:

(a) $x \leq y$ e $x\mathsf{C}z \Rightarrow y\mathsf{C}z$; (b) $x \leq y \Rightarrow x\mathsf{C}y$;

(c) $x\mathsf{S}y \Rightarrow x\mathsf{C}y$; (d) $x \leq y \Rightarrow x\mathsf{S}y$.

Dim. (a): $x\mathsf{C}z$ significa $z \in \mathsf{C}(x)$, ma da $x \leq y$ segue $\mathsf{C}(x) \subseteq \mathsf{C}(y)$, e quindi $z \in \mathsf{C}(y)$.
(b): segue da (a) una volta scelto $z = x$.
(c): $x\mathsf{S}y$ significa che esiste $z \leq x$ e $z \leq y$, che per (b) diventa $z \leq x$ e $z\mathsf{C}y$, dopo di che per (a) si ha $x\mathsf{C}y$.
(d): basta osservare che esiste $x \leq y$ e $x \leq x$.

□

Osservazione 3.1.5. Per ogni regione x:
(i) $\exists y \neq x\ (y\mathsf{C}x)$;
(ii) $\exists z \neq x\ \neg(z\mathsf{C}x)$.

Dim. (i): per **3.1.3** esiste $y < x$, e per **3.1.4b** è $y\mathsf{C}x$.
(ii): per **A2** esiste una regione z non connessa ad x, e per **A4** non può essere x.

□

La seguente proposizione rafforza il terzo assioma.

Proposizione 3.1.6. Per ogni coppia di regioni x,y esiste una regione z distinta da entrambe, ma ad entrambe connessa. In simboli: $\forall x,y \;\; \exists z \neq x,y \;\; (x\mathsf{C}z \text{ e } z\mathsf{C}y)$.

Dim. <u>*1° caso*</u>: $x = y$. Sia t una regione diversa da x (t esiste per **3.1.5**). Per **A3** esiste una regione z connessa con x e con t. Se $z = x$, t è la regione richiesta; se $z \neq x$, la regione cercata è z.

<u>*2° caso*</u>: $x \neq y$. Siano, per **3.1.3**, $x'<x$ ed $y'<y$ e sia, per **A3**, z' connessa con x' e y' e quindi anche, per **3.1.4a**, con x ed y. Se per assurdo per x ed y non valesse la tesi, allora almeno uno tra x ed y dovrebbe essere uguale a z'.
Sia per esempio $z' = x$. Risulta $y'\mathsf{C}x$, e banalmente è $y'\mathsf{C}y$. Abbiamo che y' è connessa ad x e ad y e siamo nell'ipotesi che la tesi non valga; quindi, essendo $y \neq y'$, deve essere $y' = x$; ma era $y'<y$, pertanto sarà $x \leq y$. Segue x' connessa a x e y, ma diversa da entrambe, che è assurdo.

□

3.2 Dissezioni e intersezioni

Whitehead propone la seguente nozione di *dissezione*:

"*Una "dissezione" di una regione data A, è un gruppo di regioni tali che:*

(I) *tutti i suoi membri sono inclusi in A;*

(II) *non ci sono due dei suoi membri che si sovrappongono;*

(III) *una regione inclusa in A, che non è membro del gruppo, o è inclusa in un membro del gruppo, o si sovrappone a più membri del gruppo."*

Formalmente, e tenendo presente la riflessività di $\leq$, si ha la seguente:

Definizione 3.2.1. Chiameremo *dissezione* di una regione x ogni insieme di regioni D tali che:

(a) $y \in \mathrm{D} \;\Rightarrow\; y \leq x$;

(b) $y,z \in \mathrm{D}$ e $y \neq z \;\Rightarrow\; \neg(y\mathsf{S}z)$;

(c) $(\, y \leq x \text{ e } \nexists w \in \mathrm{D}\, (\, y \leq w\,)) \;\Rightarrow\; \exists t,z \in \mathrm{D} \;\; (\, y\mathsf{S}t \text{ e } y\mathsf{S}z\,)$.

In seguito indicheremo con $\Pi(x)$ l'insieme delle dissezioni di x.

Si ammettono i seguenti due assiomi per le dissezioni che corrispondono rispettivamente alle assunzioni **W13** e **W14**:

Il settimo assioma afferma l'esistenza di dissezioni proprie:

A7 $\quad \forall x \;\; \exists \mathrm{D} \in \Pi(x) \;\; (\mathrm{D} \neq \{x\})$

L'ottavo assioma asserisce che due diverse regioni non possono avere una stessa dissezione:

A8 $\quad \forall x\, \forall y \;\; \forall \mathrm{D}_1 \in \Pi(x) \;\; \forall \mathrm{D}_2 \in \Pi(y) \;\; (x \neq y \;\Rightarrow\; \mathrm{D}_1 \neq \mathrm{D}_2)$

Ovviamente ogni regione x ammette come dissezione la classe D = $\{x\}$, e per **A8** è questa l'unica dissezione di x costituita da un solo elemento; chiameremo *propria* ogni dissezione diversa da essa.

Nella definizione di dissezione sembra naturale semplificare la condizione (c) sostituendola con la seguente:

(c′) $y \leq x \;\Rightarrow\; \exists z \in \mathrm{D}\,(\, y\mathsf{S}z\,)$

Sfortunatamente, però, mentre è evidente che (c) ⇒ (c′), il sistema di assiomi **A1**-**A8** non permette di provare il viceversa, e quindi l'equivalenza. Per affrontare meglio la questione, notiamo che le condizioni (a), (b), (c) e (c′) non fanno riferimento diretto alla relazione di connessione. Possono, pertanto, essere riformulate per un qualunque insieme ordinato (M, ≤), ottenendo:

(a) $\forall d \in \mathrm{D}\,(d \leq x)$;

(b) $y,z \in \mathrm{D}$ e $y \neq z \;\Rightarrow\; \neg(y\mathsf{S}z)$;

(c) $(\, y \leq x$ e $\nexists w \in \mathrm{D}\;(\, y \leq w\,)) \;\Rightarrow\; \exists t,z \in \mathrm{D}\;(\, y\mathsf{S}t$ e $y\mathsf{S}z\,)$;

(c′) $y \neq 0, y \leq x \;\Rightarrow\; \exists z \in \mathrm{D}\colon y\mathsf{S}z$ (dove 0 è l'eventuale minimo di M)

Naturalmente, nel caso siano verificate (a), (b) e (c), diremo ancora che D è una dissezione di x.

Proposizione 3.2.2. Sia B un'algebra di Boole. Per ogni classe D non vuota di elementi di B e per ogni elemento x di B -$\{0\}$, le condizioni (c) e (c′) si equivalgono.

Dim. Supposta vera (c′), sia $y \in \mathrm{B}$ tale che $y \leq x$ e $y \nleq t$ per ogni $t \in \mathrm{D}$. Poiché $y \neq 0$, per (c′) esiste in D una regione z che si sovrappone a y. Inoltre, essendo $y \nleq z$, sarà $y' = y - z \neq 0$, ed ancora per (c′), siccome $y' \leq x$, esiste $z' \in \mathrm{D}$ con y', e a maggior ragione con y, sovrapposto a z'. Ora essendo $y' \wedge z = 0$, deve essere $z \neq z'$, il che dimostra (c). L'altra implicazione è banale.

□

Una più radicale modifica della definizione di dissezione si apporterebbe sostituendola con quella di *partizione insiemistica*. Purtroppo, però, la nozione insiemistica di partizione non potrà mai soddisfare le nostre esigenze, perché (come spiega la **3.4.2**) necessita dell'operazione di "unione", di cui non disponiamo. Utilizzeremo, pertanto, la nozione di "partizione" definita dalla **1.1.9**.

Proposizione 3.2.3. Sia B un'algebra di Boole completa, D una classe non vuota di elementi di B e $x \in \mathrm{B}$-$\{0\}$. Allora le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) D è una partizione di x ;

(ii) D è una dissezione di x ;

(iii) D e x verificano (a), (b) e (c′).

Dim. Da **3.2.2** segue che (ii) ⇔ (iii). Basta quindi mostrare che (i) ⇔ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (iii): Se D è una partizione di x, (a) e (b) sono verificate. Sia allora $y \leq x$ e $y \neq 0$: vogliamo provare che y si sovrappone ad almeno un elemento di D. Essendo $x = \sup(D)$, per la proprietà distributiva si ha $y = y \wedge x = y \wedge \sup(D) = \sup\{y \wedge z : z \in D\}$. Infine dall'ipotesi $y \neq 0$ segue che esiste $z' \in D$ tale che $y \wedge z' \neq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supposte vere (a), (b) e (c′), proviamo che $x = \sup(D)$, e cioè che $x \leq \sup(D)$. Sia per assurdo $\sup(D) < x$, allora posto $y = x - \sup(D)$, risulta $y \neq 0$ e $y \leq x$. Notando che per ogni $z \in D$ è $z \leq \sup(D)$, si ha $y \wedge z = (x - \sup(D)) \wedge z = 0$ per ogni $z \in D$, in contrasto con l'ipotesi (c′).

□

A questo punto Whitehead offre la seguente nozione di "intersezione" di due regioni:

"*Una regione è chiamata "intersezione" di due regioni sovrapposte, A e B, quando:*

(I) o è inclusa sia in A che in B, o è una delle due regioni ed è inclusa nell'altra;

(II) nessuna regione, parte sia di A che di B, può sovrapporsi ad essa senza esservi inclusa."

Osservando che l'aver assunto riflessiva l'inclusione riduce la condizione (I) a "è inclusa sia in A che in B", formalmente si ha la seguente

Definizione 3.2.4. Una *intersezione* di due regioni x e y è una sottoregine z di x e y per cui:

$$\forall t \ ((t \leq x \text{ e } t \leq y \text{ e } t \mathsf{S} z) \Rightarrow t \leq z).$$

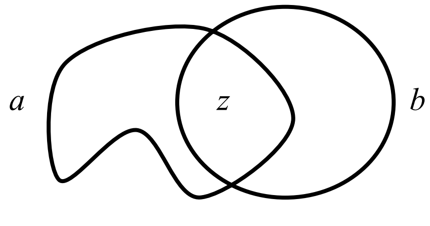
Se t è una intersezione di x ed y scriveremo $t_{x,y}$.

Per la nozione di intersezione si ammette il seguente assioma che corrisponde alla prima parte della **W15**:

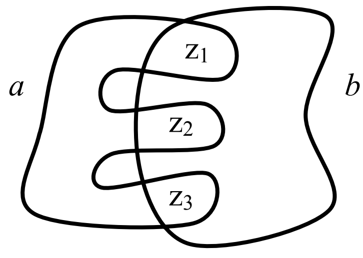
Il nono assioma afferma che ogni sottoregione di due regioni x ed y è contenuta in almeno una intersezione di x ed y:

A9 $\quad \forall x \, \forall y \, \forall t \ (t \leq x \text{ e } t \leq y \Rightarrow \exists z_{x,y} (t \leq z_{x,y}))$

Da **A9** segue che due regioni sovrapposte hanno <u>almeno</u> un'intersezione. Inoltre Whitehead fa presente la possibilità che esistano più intersezioni per una coppia di regioni: in questo caso si parlerà di *intersezioni multiple*; in caso contrario di *intersezione unica*.



intersezione unica



intersezioni multiple

È evidente che il concetto di intersezione multipla ha senso solo se per regioni s'intendono i "connessi". Whitehead affermerà solo con le ultime assunzioni (**W28**, **W29** e **W30**) che la sua idea di regione presuppone la connessione. Tuttavia, è chiaro che tale concetto sia alla base di tutte le definizioni da lui offerte, perché diverrebbero banali in caso contrario. Di conseguenza, da questo punto, per una corretta interpretazione del discorso, è bene ricordare che per regioni s'intendono i connessi.
Le assunzioni **W16**, **W17** e **W18** sono facilmente dimostrabili a partire dalle precedenti. Vale inoltre la seguente proposizione, che corrisponde alla seconda parte della **W15**:

Proposizione 3.2.5. Intersezioni diverse non si sovrappongono. Pertanto, ogni sottoregione di due regioni è contenuta in una ed una sola intersezione.

Dim. Siano t e z due diverse intersezioni di x ed y. Se fosse $t\mathsf{S}z$, dalla definizione di intersezione applicata a t e a z si avrebbe $t\leq z$ e $z\leq t$ e quindi $t = z$, che è assurdo.

□

La seguente proposizione mostra le analogie tra la definizione d'intersezione data da Whitehead e quella utilizzata in teoria degli insiemi.

Proposizione 3.2.6. Una regione z è un'intersezione di x ed y se e solo se z è un elemento massimale nella classe delle sottoregioni di x ed y. In particolare, se l'intersezione è unica, essa coincide con l'estremo inferiore tra x ed y (e quindi con l'usuale definizione di intersezione).

Dim. ($\Rightarrow$): sia z un'intersezione di x ed y, e sia z' sottoregione di x ed y contenente z. Allora $z'\mathsf{S}z$ e quindi $z'\leq z$.
Viceversa ($\Leftarrow$), sia z massimale nella classe delle sottoregioni di x ed y e sia t una sottoregione di x ed y che si sovrappone a z. Se r è una sottoregione di t e z, da $r\leq t$ e t sottoregione di x ed y, segue r sottoregione di x ed y; e per **A9** esiste una intersezione z' di x ed y tale che $r\leq z'$; ma era $r\leq z$, e quindi $z\mathsf{S}z'$. Abbiamo: z' intersezione di x ed y; z sottoregione di x ed y e $z\mathsf{S}z'$. Per definizione di intersezione si ha $z\leq z'$, e, per la massimalità di z, $z = z'$. Ciò prova che z è un'intersezione.
Infine, se x ed y hanno intersezione unica z, ogni sottoregione di x ed y, per **A9**, è inclusa in z, che risulta così l'estremo inferiore tra x ed y.

□

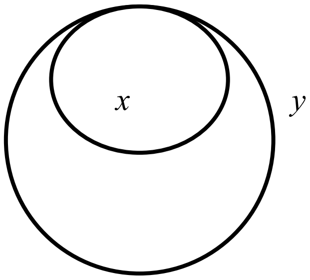
3.3 Gruppi astrattivi ed elementi geometrici

A questo punto Whitehead si serve di alcune nuove relazioni che gli saranno utili per definire il concetto di "gruppo astrattivo", organo vitale delle sue teorie.

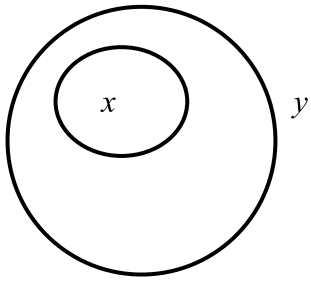
Definizione 3.3.1. Date due regioni x e y diremo che:

- sono *connesse esternamente* se sono connesse ma non si sovrappongono;

- x è *inclusa tangenzialmente* in y se x è inclusa in y ed esiste una regione connessa esternamente ad entrambe;
- x è *inclusa non tangenzialmente* in y e scriveremo $x \ll y$ se per connettersi ad x è necessario sovrapporsi ad y. In simboli: $x \ll y \ \Leftrightarrow_{def} \ \mathsf{C}(x) \subseteq \mathsf{S}(y)$.



inclusione tangenziale



inclusione non tangenziale

Definizione 3.3.2. Diremo *gruppo astrattivo* un insieme di regioni A se:

(1) è totalmente ordinato rispetto a $\ll$;

(2) non esiste una sottoregione comune a tutti i suoi elementi.

In termini matematici, un gruppo astrattivo è una *catena senza minoranti*. In seguito il simbolo $\mathcal{GA}$ indicherà l'insieme dei gruppi astrattivi.

Definizione 3.3.3. Diremo che un gruppo astrattivo B *copre* un gruppo astrattivo A e scriveremo $A \preccurlyeq B$ se ogni elemento di B copre un elemento di A. In simboli:

$$A \preccurlyeq B \ \ \Leftrightarrow_{def} \ \ \forall b \in B \ \ \exists a \in A : a \leq b.$$

E' banale verificare che la relazione di copertura è riflessiva e transitiva, e quindi un preordine. A conferma di ciò Whitehead gli associa una relazione d'equivalenza e quindi un opportuno spazio quoziente.

Definizione 3.3.4. Diremo che due gruppi astrattivi A e B sono *equivalenti* e scriveremo $A \equiv B$ se si coprono a vicenda. In simboli:

$$A \equiv B \ \Leftrightarrow_{def} \ B \preccurlyeq A \ \text{ e } \ A \preccurlyeq B.$$

(Tale relazione verifica automaticamente le assunzioni dalla **W19** alla **W23**).

Definizione 3.3.5. Chiameremo *elemento geometrico* ogni classe d'equivalenza generata dalla relazione $\equiv$.

Indicheremo, allora, con $\mathcal{GA}/\equiv$ l'insieme degli elementi geometrici. Tale spazio è munito di una relazione, che diremo d'*incidenza*, definita ponendo

$$[A] \preccurlyeq [B] \ \ \Leftrightarrow_{def} \ \ A \preccurlyeq B$$

Tale relazione è banalmente antisimmetrica e quindi un ordine. Similmente a Euclide, Whitehead definisce i punti come *enti senza parti*, dove ovviamente per parte deve intendersi "parte propria".

In accordo con la nostra preferenza degli ordini larghi, si ha la seguente

Definizione 3.3.6. Chiameremo *punto* ogni elemento minimale di $(\mathcal{GA}/\equiv,\preccurlyeq)$.

NOTAZIONE. Chiameremo *membri* dell'elemento geometrico α i gruppi astrattivi che appartengono alla classe d'equivalenza che rappresenta l'elemento geometrico α. In sostanza, i membri di un elemento geometrico non sono altro che i suoi elementi; pertanto, per indicare che il gruppo astrattivo A è membro dell'elemento geometrico α scriveremo banalmente $A\in\alpha$.

Riferendosi ai membri di un elemento geometrico, Whitehead si serve del concetto di "essere primi rispetto ad una condizione data *s*" (vedi **D16.1**) per definire l'oggetto geometrico "segmento tra due punti".[9] Formalmente la **D16.1** è espressa dalla seguente

Definizione 3.3.7. Sia s una proprietà definita in $\mathcal{GA}$, allora diremo *primi* rispetto ad s i membri di un elemento geometrico α se:

(i) A è un elemento minimale di $(\{X\in\mathcal{GA} : X \text{ soddisfa } s\},\preccurlyeq)$ per ogni $A\in\alpha$;

(ii) Y soddisfa s e $Z \equiv Y \quad \Rightarrow \quad Z$ soddisfa s.

Definizione 3.3.8. Un elemento geometrico sarà detto *segmento*[10] *tra due punti* P e Q, quando i suoi membri sono primi rispetto alla condizione che P e Q siano incidenti in esso. In tal caso P e Q saranno detti *estremi* del segmento.

Riportiamo per comodità i due concetti espressi nell'assunzione **W25**:

(1) *ci sono segmenti diversi con gli stessi estremi;*

(2) *un segmento ha una sola coppia di estremi.*

La (1) non è conseguenza di **A1**-**A9**, infatti si ha:

Proposizione 3.3.9. La classe *Ov* degli aperti regolari connessi limitati convessi e non vuoti di uno spazio euclideo è un modello di **A1**-**A9** che non verifica la prima parte della **W25**.

[9] Si noti che col termine "segmento" s'intende quasi sempre "segmento di retta", mentre è evidente che Whitehead si riferisce a segmenti di curve qualsiasi (vedi anche **W25**). Solo in seguito, con l'introduzione della classe ovata (vedi paragrafo **3.5**), al segmento corrisponderà quello "usuale".

[10] Se non ci fossimo già ristretti ai connessi, stando alla definizione appena data, *il segmento tra i punti P e Q* sarebbe banalmente la coppia di punti P e Q.

Dim. Una volta acquisita la **3.4.3** è facile verificare che la struttura (Ov,C) soddisfa ancora il sistema **A1**-**A9**, ma il segmento definito da Whitehead coincide col segmento usuale: di conseguenza due punti definiscono un unico segmento.

□

Tuttavia, la (1) non verrà assunta come assioma, perché sembra più un'indicazione che l'idea di segmento non corrisponde a quella di segmento di retta, piuttosto che una base per effettuare dimostrazioni. La (2), invece, pur sembrando ovvia, non è chiaro se sia dimostrabile.

Definizione 3.3.10. Diremo che un punto P è *situato* in una regione x e scriveremo P $\underline{\in}$ x se esiste un gruppo astrattivo A∈P tale che x∈A.

(La **W26** è una conseguenza della **3.3.10**).

Definizione 3.3.11. Chiameremo *superficie* di una regione x, l'insieme σ_x dei punti P tali che ogni regione su cui P è situato si sovrappone ad x senza esservi inclusa. In simboli:

$$\sigma_x = \{\text{P punto} : \forall y\ (\text{P} \underline{\in}\ y \ \Rightarrow\ (y\mathsf{S}x \ \text{ e } \ y \not\leq x))\}$$

Da notare, che essendo i gruppi astrattivi totalmente ordinati dall'inclusione non tangenziale, i punti situati della superficie di una regione x non possono essere situati anche nella regione x. Il fatto che Whitehead consideri la superficie non facente parte della regione ci suggerisce che per regioni intende gli *aperti*.

Con la **D23** e la **D24** Whitehead introduce il concetto di "luogo completo" utile per definire altri elementi geometrici.

Definizione 3.3.12. Un gruppo di punti sarà chiamato *luogo completo* se è composto da tutti i punti situati in una regione, o da tutti i punti situati sulla superficie di una regione, o da tutti i punti incidenti in un elemento geometrico.
In particolare, nel primo caso sarà detto il "volume" di quella regione; nel secondo caso la "superficie". Quando consiste di tutti i punti incidenti in un segmento fra estremi, sarà detto un "tratto lineare" fra quegli estremi.

Anche in questo caso è evidente che Whitehead per "luogo di punti" intende un "continuo" (o connesso), come assicurano IV, V e VI di **Def 1**.

Con l'assunzione **W27** Whitehead, in particolare, spiega che è possibile identificare ogni regione col proprio volume, ovvero con l'insieme dei punti che essa contiene. Ciò equivale a dire che se due regioni sono diverse, allora gli insiemi dei punti ad esse associati sono distinti.

Si ammette, pertanto, il seguente assioma, che si collega alla **W27**:

A10 $\quad x \neq y \ \Rightarrow\ \{\text{P punto} : \text{P} \underline{\in}\ x\} \neq \{\text{Q punto} : \text{Q} \underline{\in}\ y\}$

Proposizione 3.3.13. In ogni regione sono situati infiniti punti.

Dim. Data una regione x, per **3.1.3** esiste una catena strettamente decrescente x_1, $x_2, \ldots x_n, \ldots$ di sottoregioni di x. Inoltre da **A10** si ha che per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un punto $P_i \underline{\in} x_i$ e $P_i \underline{\notin} x_{i+1}$. Infine banalmente è $P_i \underline{\in} x$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

□

Finalmente, osserviamo che **W31** sembrerebbe seguire dall'assioma **A6** che permette di definire in ogni regione un continuo di punti.

3.4 Consistenza del sistema di assiomi

Per le strutture di connessione, il modello che esibiremo sarà quello degli *aperti regolari connessi limitati e non vuoti di uno spazio euclideo.* Le motivazioni di tale scelta sono le stesse del paragrafo **2.7** sino alla definizione di *regione*, poi per quanto riguarda la selezione delle regioni si ha:

- la **3.1.3 e A2** spiegano rispettivamente perché il vuoto e l'intero spazio non devono essere considerate regioni;
- dall'esistenza di intersezioni multiple, ma anche dalle assunzioni **W28**, **W29** e **W30**, si evince che l'idea di regione di Whitehead presuppone la connessione[11];
- escludiamo le regioni non limitate, altrimenti si ottengono anche elementi geometrici "poco" euclidei, come gli enti "all'infinito". Per esempio la successione $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dei semispazi $b_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > i\}$ costituisce un gruppo astrattivo B che rappresenta un ente che non ha punti al finito.

Indichiamo dunque con $\mathcal{RO}$ la classe degli aperti regolari dello spazio euclideo a tre dimensioni, ordinata rispetto alla relazione d'inclusione e con $\mathcal{R}$ il sottoinsieme di $\mathcal{RO}$ costituito dai connessi limitati non vuoti.
Dato un insieme D di elementi di $\mathcal{R}$, denoteremo con $\sup_{\mathcal{R}}$ (D) l'estremo superiore di D in $\mathcal{R}$ (quando esiste) e con $\sup_{\mathcal{RO}}$ (D) l'estremo superiore di D in $\mathcal{RO}$ (che esiste sempre in quanto, per la **1.5.1**, $\mathcal{RO}$ è un'algebra di Boole completa).
Notiamo, inoltre, che se $\sup_{\mathcal{RO}}(D) \in \mathcal{R}$, allora esiste $\sup_{\mathcal{R}}$ (D), in quanto è $\sup_{\mathcal{R}}(D) = \sup_{\mathcal{RO}}(D)$. D'altra parte è facile fornire casi in cui $\sup_{\mathcal{R}}$ (D) non esiste: un semplice esempio si ottiene supponendo che D sia costituito da due sfere aperte disgiunte.

Lemma 3.4.1. Sia D un sottoinsieme di $\mathcal{R}$, ed x,y,z elementi di $\mathcal{R}$. Si ha:

(i) esiste $\sup_{\mathcal{R}}(D) \Rightarrow \sup_{\mathcal{R}}(D) = \sup_{\mathcal{RO}}(D)$;

[11] Come nel secondo capitolo, anche qui la scelta di restringersi ai connessi non è essenziale per la verifica degli assiomi. È stata fatta solo per interpretare al meglio le idee di Whitehead.

(ii) x e y si sovrappongono in $\mathcal{R}$ $\Leftrightarrow$ x e y si sovrappongono in $\mathcal{RO}$;

(iii) D è una partizione di z in $\mathcal{R}$ $\Leftrightarrow$ D è una partizione di z in $\mathcal{RO}$;

(iv) D è una dissezione di z in $\mathcal{R}$ $\Leftrightarrow$ D è una dissezione di z in $\mathcal{RO}$.

Dim. (i): siano $s = \sup_{\mathcal{R}}$ (D) e $t = \sup_{\mathcal{RO}}$ (D); è ovvio che $t \subseteq s$. Supponiamo per assurdo $t \neq s$. Per **1.4.5ii**, l'elemento $w = s - t^{-}$ di $\mathcal{RO}$ è non vuoto. Scelto allora un punto p in w, per **1.5.2**, esiste una sfera chiusa φ di centro p contenuta in w tale che l'aperto regolare $s' = w - \varphi$ è ancora un connesso e quindi appartenente a $\mathcal{R}$. Per costruzione, s' è un maggiorante di D in $\mathcal{R}$ propriamente contenuto in s, che è assurdo.

(ii): entrambe le proprietà equivalgono al fatto che $x \cap y \neq \emptyset$.

(iii): segue direttamente da (i) e da (ii).

(iv): l'implicazione ($\Leftarrow$) è ovvia. Per provare ($\Rightarrow$), supponiamo che D sia una dissezione di z in $\mathcal{R}$ e sia $w \in \mathcal{RO}$-$\{\emptyset\}$ tale che $w \subseteq z$. Allora detto w' un connesso regolare contenuto in w, segue che w' o è contenuto in qualche elemento di D o si sovrappone ad almeno di due elementi di D. In entrambi i casi si può affermare che w si sovrappone ad almeno un elemento di D, il che significa, per la **3.2.2**, che D è una dissezione di z in $\mathcal{RO}$.

□

Nota 3.4.2. Nell'insieme ordinato $(\mathcal{R},\subseteq)$ la nozione di partizione non coincide mai con quella insiemistica. Infatti, un elemento x di $\mathcal{R}$, in quanto aperto connesso, non può essere mai unione (insiemistica) di una famiglia D di elementi disgiunti di $\mathcal{R}$; invece x può essere benissimo l'estremo superiore di una tale famiglia. Ad esempio se si considera una sfera aperta s e la si "spezza" in due semisfere aperte s_1 e s_2 allora D = $\{s_1,s_2\}$ è una partizione di s in $\mathcal{R}$.

Teorema 3.4.3. Siano $x,y \in \mathcal{R}$ e poniamo

$$x\mathsf{C}y \Leftrightarrow_{def} x^{-} \cap y^{-} \neq \emptyset.$$

Allora $(\mathcal{R}, \mathsf{C})$ è un modello del sistema di assiomi **A1**-**A10**. In tale modello:

(i) la relazione $\leq$ coincide con l'inclusione insiemistica;

(ii) x e y si sovrappongono $\Leftrightarrow$ $x \cap y = \emptyset$;

(iii) D è una dissezione di w $\Leftrightarrow$ D è una partizione di w.

(iv) z è un'intersezione di x ed y $\Leftrightarrow$ z è una componente connessa di $x \cap y$;

(v) x ed y sono connessi esternamente $\Leftrightarrow$ $x^{-} \cap y^{-} \neq \emptyset$ e $x \cap y = \emptyset$;

(vi) $x \ll y \Leftrightarrow x^{-} \subseteq y$.

Dim. (i): $x \subseteq y \Rightarrow x^{-} \subseteq y^{-}$, da cui $\mathsf{C}(x) = \{z \in \mathcal{R} : z^{-} \cap x^{-} \neq \emptyset\} \subseteq \{z \in \mathcal{R} : z^{-} \cap y^{-} \neq \emptyset\} = \mathsf{C}(y)$. Ovvero $\mathsf{C}(x) \subseteq \mathsf{C}(y)$ e quindi $x \leq y$.
Viceversa, sia $x \leq y$, e supponiamo per assurdo $x \not\subseteq y$. Per **1.4.5i** si ha $x \not\subseteq y^{-}$ e quindi $x\text{-}y^{-} \neq \emptyset$. Per **1.5.2** esiste $z \in \mathcal{R}$ tale che $z \subseteq x\text{-}y^{-}$. Si ha pertanto $z\mathsf{C}x$ e $\neg(z\mathsf{C}y)$, in contrasto con l'ipotesi.

(ii): ovvia.

(iii): supponiamo che D sia una dissezione di z e che $z' = \sup_{\mathcal{RO}}$ (D). Allora D è una partizione di z' in $\mathcal{RO}$ e, poiché z è un aperto regolare contenente tutti gli elementi di D, risulta $z' \leq z$. Supponiamo per assurdo che sia $z' < z$, allora per **1.4.5ii** e **1.5.2** esiste un elemento x di $\mathcal{R}$ contenuto in z e disgiunto da z'. In particolare x è disgiunto da ogni elemento di D e ciò è in contrasto con l'ipotesi, per cui D è una dissezione di z. Si ha pertanto $z' = z$ e quindi $z' \in \mathcal{R}$; infine, per **3.4.1**, D è una partizione di z in $\mathcal{R}$.
Viceversa, supponiamo che D sia una partizione di z, allora per **3.4.1** D è una partizione di z in $\mathcal{RO}$. Essendo $\mathcal{RO}$ un'algebra di Boole completa, per **3.2.2** si ha che D è una dissezione di z in $\mathcal{RO}$; infine ancora per **3.4.1** D è una dissezione di z in $\mathcal{R}$.

(iv): sia z una componente connessa di $x \cap y$, allora, per **1.4.4iv** e **1.7.9**, z è un aperto regolare (connesso limitato e non vuoto) e quindi $z \in \mathcal{R}$. Se t è una sottoregione di x e di y che si sovrappone a z, per **1.7.3**, $t \cup z$ è un connesso e quindi per la massimalità di z, $(t \cup z) \subseteq z$, cioè $t \subseteq z$. Ciò prova che z è una intersezione.
Viceversa, sia z una intersezione di x ed y, allora z è un connesso non vuoto contenuto in $x \cap y$. Se per assurdo z non fosse una componente connessa esisterebbe z', con $z' \supset z$ e $z' \subseteq (x \cap y)$, in contrasto con la definizione di intersezione.

(v): ovvia.

(vi): vedi **1.4.6**.

Proviamo ora la che la struttura $(\mathcal{R}, \mathsf{C})$ verifica gli assiomi.
A1, **A4**, e **A6** sono immediati. **A2** deriva dall'aver considerato solo insiemi limitati. Per quanto riguarda **A3**, osserviamo che vale la proprietà più forte che ogni coppia di regioni è contenuta in una regione.

Allo scopo di provare **A5**, consideriamo due regioni x ed y tali che $\mathsf{C}(x) = \mathsf{C}(y)$ e supponiamo per assurdo che sia $x \not\subseteq y$. Osserviamo che $x \not\subseteq y^{-}$, altrimenti sarebbe $x^{-} \subseteq y^{-}$, e, per la regolarità di x ed y, $x \subseteq y$; dunque esiste un punto $P \in x\text{-}y^{-}$. Detto allora φ una sfera di centro P tale che $\varphi \cap y^{-} = \emptyset$, abbiamo $\varphi\mathsf{C}x$ e $\neg(\varphi\mathsf{C}y)$, e ciò contraddice l'ipotesi. Similmente si prova che $y \subseteq x$.

Per provare **A7**, sia $x \in \mathcal{R}$ e sia P un punto di x. Consideriamo un piano π passante per P: esso divide lo spazio $\mathbb{R}^3$ in due semispazi aperti s_1 e s_2. Posto $x_1 = x \cap s_1$ e $x_2 = x \cap s_2$ e indicate con D_1 e D_2 le classi delle componenti connesse di x_1 e x_2

rispettivamente, proviamo che D = $D_1 \cup D_2$ è una dissezione propria di x. Che sia propria è ovvio. Sia $y \subseteq x$. Se $y \cap \pi = \emptyset$, allora y è un connesso contenuto in $x_1 \cup x_2$, ed è quindi interamente contenuto in una componente connessa, cioè uno degli elementi di D. Se ad y appartiene un punto Q di π, un'opportuna sfera di centro Q è tutta contenuta in y, ed allora y interseca almeno un elemento di D_1 ed un elemento di D_2. Pertanto **A7** è provato.

L'assioma **A8** è un'immediata conseguenza del fatto che la nozione di dissezione coincide con quella di partizione.

L'assioma **A9** è verificato grazie alla circostanza che le intersezioni coincidono con le componenti connesse.

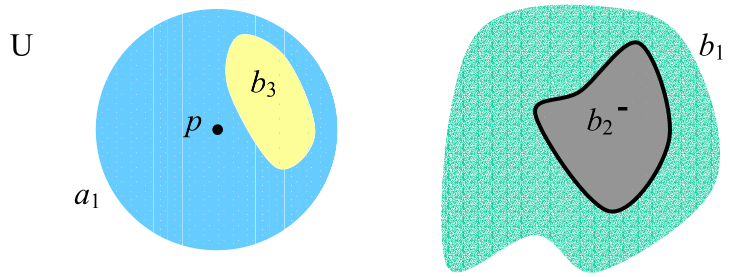
L'assioma **A10** vale grazie alla **3.4.4**.

□

Un notevole risultato è espresso dal seguente teorema.

Teorema 3.4.4. In $(\mathcal{R}, \mathsf{C})$ l'insieme dei punti definiti da Whitehead coincide con $\mathbb{R}^3$.

Dim. Se $p \in \mathbb{R}^3$, allora le sfere aperte di centro p rappresentano un gruppo astrattivo A che ovviamente "converge" a p. Per provare che $[A]$ è minimale in $(\mathcal{GA}/\equiv, \preccurlyeq)$, mostreremo che se esiste $[B] \preccurlyeq [A]$, allora è $[B] = [A]$. Sia $[B] \preccurlyeq [A]$, allora è $B \preccurlyeq A$, ovvero ogni $a \in A$ si estende su qualche $b \in B$. Proviamo ora che p è contenuto in ogni $b \in B$. Supponiamo per assurdo che esista un $b_1 \in B$ non contenente p, e consideriamo un $b_2 \in B$ tale che $b_2 \ll b_1$, in tal modo siamo certi che p non appartiene alla chiusura di b_2.



Considerato allora il chiuso regolare b_2^-, poiché $\mathbb{R}^3$ è $\boldsymbol{T}_3$, esiste un aperto U che separa p da b_2. In U, poiché le sfere aperte sono una base per la topologia, trovo una sfera aperta a_1 di centro p, ovviamente a_1 è separata da b_2. Ma a_1 si estende su qualche $b_3 \in B$, e quindi b_2 e b_3 sono separate, il che è assurdo perché B è una catena. Accertato che p è contenuto in ogni $b \in B$, è evidente che ogni elemento di B contiene un elemento di A. Quindi $A \equiv B$.

Viceversa, sia p un elemento minimale in $(\mathcal{GA}/\equiv, \preccurlyeq)$, e sia P un suo membro (cioè $p = [P]$). Ricordando che le regioni di P sono aperti regolari limitati, consideriamo l'insieme P' costituito dalle chiusure delle regioni di P; segue che P' è costituito da compatti. Detta I l'intersezione di tali compatti, si ha che I è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^3$. Esiste pertanto in I almeno un punto x. Osserviamo, ora, che x è contenuto in ogni regione di P'; e che, per **3.4.3vi**, è contenuto anche in ogni regione di P. Allora, per **1.5.2**, ogni regione di P contiene una sfera aperta di centro x. Tali sfere, prese assieme, rappresentano ovviamente un gruppo astrattivo X che converge al punto x. Segue $X \preccurlyeq P$, e $[X] \preccurlyeq [P]$. Per la minimalità di $[P]$ si ha $[P] = [X]$, e quindi p coincide col punto x.

□

Alcune semplici osservazioni:

1) Un punto p è *situato in una regione x* se $p \in x$, e ciò concorda con l'osservazione (vedi **3.3.10**) che i punti situati in x sono quelli interni a x, giacché le regioni del nostro modello sono aperti.

2) La *superficie* di una regione coincide con la sua frontiera. Basta osservare che le due definizioni (**1.3.6** e **3.3.11**) coincidono.

3.5 La classe ovata

Il cammino appena percorso conduce alla definizione di concetti topologici (cioè invarianti per trasformazioni continue) come quelli di punto, linea, superficie. Per definire oggetti più propriamente geometrici, come quelli di segmento e di figura piana, Whitehead ricorre ad una classe di regioni particolari, chiamate "ovali".

Come quello di regione, tale concetto deve essere assunto come primitivo: devono pertanto essere evidenziati gli assiomi da imporre alla nozione di ovale. Nel capitolo III della parte IV di *Processo e Realtà*, Whitehead elenca ben 12 proprietà (vedi **Def 1**) sufficienti per definire la classe ovata, e quindi punto di partenza per la compilazione del sistema di assiomi. Tale ricerca, però, non sarà oggetto di questa tesi, qui ci limiteremo soltanto ad elencarne i risultati, evidenziando la corrispondenza tra gli elementi geometrici usuali e quelli definiti mediante la classe ovata.

Ad ogni modo, sembra che l'intuizione di "ovale" presente in Whitehead sia quella di regione che non ha "incavi". In termini attuali diremmo che un ovale è un insieme convesso.

Definizione 3.5.1. Diremo *ovato* un gruppo astrattivo se i suoi membri sono ovali.

Proposizione 3.5.2. Se due gruppi astrattivi sono primi rispetto alla stessa condizione duplice:

(i) di coprire un *dato* insieme di punti;

(ii) di essere equivalenti a un qualsiasi gruppo astrattivo ovato che soddisfi (i);

allora essi sono equivalenti.

Dim. I due gruppi astrattivi sono equivalenti o allo stesso gruppo astrattivo ovato, o a differenti gruppi astrattivi ovati. Nel primo caso, la tesi è ovvia.

Nel secondo caso, siano *A* e *B* i due differenti gruppi astrattivi ovati. Osservato che entrambi soddisfano la duplice condizione (i) e (ii), ci proponiamo di provare che sono equivalenti.
Siano *a* e *b* due regioni appartenenti rispettivamente a *A* e *B*. Si ha che *a* e *b* coprono i punti del "dato insieme" e quindi *a* ed *b* s'intersecano; ma essendo ovali hanno un'unica intersezione, e tutti i punti del *dato* insieme debbono essere situati su di essa. Peraltro questa intersezione è ovale. Ora, essendo *a* e *b* scelti a caso in *A* e *B*, è possibile, considerando tali intersezioni, trovare un terzo gruppo astrattivo che soddisfi alla duplice condizione (i) e (ii) e che sia coperto sia da *A* che da *B*; ma dal momento che *A* e *B* sono primi rispetto alla duplice condizione (i) e (ii), essi sono entrambi equivalenti a questa nuova classe attrattiva. Per transitività, *A* e *B* risultano equivalenti.

□

Corollario 3.5.3. Tutti i gruppi astrattivi primi rispetto alla stessa condizione duplice di questo tipo appartengono ad un unico elemento geometrico.

Definizione 3.5.4. L'elemento geometrico (tra l'altro unico) definito, secondo la **3.5.2**, da un gruppo di due punti è chiamato *segmento* fra quegli estremi.

Definizione 3.5.5. Diremo che un gruppo di punti che definisce un elemento geometrico è *minimale* (o *nei suoi termini più bassi*) quando non contiene alcun sottogruppo che definisca lo stesso elemento geometrico.

Definizione 3.5.6. Chiameremo *retta* un luogo di punti soddisfacenti la triplice condizione:

(i) il segmento che ha per estremi due punti qualsiasi del luogo giace interamente nel luogo,

(ii) ogni sottogruppo minimale del luogo consiste di due punti;

(iii) nessun punto può essere aggiunto al luogo senza la perdita di almeno una delle caratteristiche (i) e (ii).

Evidentemente è possibile definire in modo analogo anche la nozione di "triangolo", di "tetraedro", ecc.

Se si indica con Ov il sottoinsieme di $\mathcal{R}$ costituito dai convessi, e si considera la struttura ($\mathcal{R}$, C, Ov), non è difficile appurare che anche gli altri elementi geometrici, quali il segmento, la retta e il triangolo, coincidono con quelli usuali, anche perché tali definizioni ricordano molto quelle di Euclide.

APPENDICE 1

Tra i problemi aperti c'è la questione dell'indipendenza del sistema di assiomi **A1-A10**. Noi siamo riusciti a provare l'indipendenza soltanto per gli assiomi **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5** e **A9**, ma dubitiamo che sia possibile provarla per tutti gli altri. Riportiamo qui di seguito le nostre ricerche, sperando siano utili al fine di riformulare il sistema **A1**-**A10** in modo che risulti indipendente.

Indipendenza di A1. Consideriamo $\mathcal{R}$ e fissiamo due regioni a e b connesse esternamente. Modifichiamo, poi, la relazione di connessione C ponendo $\mathsf{C}' = \mathsf{C}-\{(b,a)\}$. Si nota che anche la relazione d'inclusione viene modificata, infatti si ha:

$$\text{se } x \neq b, \;\; y \leq' x \;\Leftrightarrow_{def}\; y \leq x\,;$$

mentre

$$y \leq' b \;\Leftrightarrow_{def}\; y \leq b \;\text{ e }\; \neg(y\mathsf{C}a).$$

Ne segue:

$$(\mathsf{C}'(y) \subseteq \mathsf{C}'(b)) \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{C}(y) \subseteq \mathsf{C}(\mathrm{b}) \;\text{ e }\; \neg(y\mathsf{C}a)).$$

Anche nel caso particolare ($b \leq' y$ e $y \leq' b$) vale **A5**. Infatti:

$(b \leq' y$ e $y \leq' b) \Rightarrow (b \leq y$ e $y \leq b$ e $\neg(y\mathsf{C}a)) \Rightarrow (\mathsf{C}(b) \subseteq \mathsf{C}(y)$ e $\mathsf{C}(y) \subseteq \mathsf{C}(b)$ e $\neg(y\mathsf{C}a)) \Rightarrow (\mathsf{C}'(b) \subseteq \mathsf{C}'(y)$ e $\mathsf{C}'(y) \subseteq \mathsf{C}'(b)) \Rightarrow (\mathsf{C}'(y) = \mathsf{C}'(b)) \Rightarrow y = b$.

Per quanto riguarda **A6** osserviamo che nel caso $z = b$, bisogna fare attenzione alla scelta di x ed y, in quanto le parti di b che erano anche connesse ad a (nella vecchia struttura) ora non sono più parti di b.
È immediata la verifica degli altri assiomi, com'è ovvio che non vale **A1**.

Indipendenza di A2. Modifichiamo il modello $\mathcal{R}$ aggiungendo come regione l'intero spazio. Per verificare **A7** basta osservare che in dimensione uno l'insieme D = $\{]z, z+1[$ con $z \in \mathbb{Z}\}$ è una dissezione di $\mathbb{R}^3$; (si considerino i cubi di lato uno per il caso tridimensionale). **A2** non vale, mentre la verifica degli altri assiomi è banale.

Indipendenza di A3. Consideriamo le regioni di $\mathcal{R}$ che possono essere interamente contenute in una sfera aperta di raggio uguale a 1, ovvero le regioni di diametro minore o uguale a 2. Si nota che sono verificati tutti gli assiomi, mentre per **A3** vale una forma più debole di connessione "per catene di regioni". Infatti date due regioni

x ed y esiste sempre una catena finita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di regioni tali che $x\mathsf{C}a_1, \ldots, a_i\mathsf{C}a_{i+1}, a_n\mathsf{C}y$ con $i = 1,\ldots,n\text{-}1$.

*Indipendenza di **A4***. Nel nostro modello $\mathcal{R}$ modifichiamo la relazione C ponendo

$$\mathsf{C}' = \mathsf{C} - \Delta \qquad \text{dove} \quad \Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathcal{R}\}$$

I primi tre assiomi continuano banalmente a valere, mentre il quarto è falso. Per la verifica degli altri assiomi bisogna esaminare come cambia la relazione $\leq$.
Definiamo quindi la relazione $\leq'$ al seguente modo:

$$x \leq' y \;\Leftrightarrow_{def}\; x<y \;\text{ oppure }\; x = y\,;$$

dove:

$$x<y \;\Leftrightarrow_{def}\; (x \neq y \;\text{ e }\; \forall z\,(z \neq y \;\text{ e }\; z\mathsf{C}'x \;\Rightarrow\; z\mathsf{C}'y)).$$

Lemma. $x \leq y \;\Leftrightarrow\; (x<y$ oppure $x = y)$; e quindi $<$ è proprio la relazione di ordine stretto associata a $\leq$.

Dim. ($\Rightarrow$). Supposto $x \leq y$ e $x \neq y$, sia $z \neq y$ e $z\mathsf{C}'x$. Risulta $z\mathsf{C}x$ e da $x \leq y$ segue $z\mathsf{C}y$; inoltre essendo $z \neq y$ si ha $z\mathsf{C}'y$.
Viceversa ($\Leftarrow$), è ovvio che da $x = y$ segue $x \leq y$. Se invece è $x<y$, considerato z tale che $z\mathsf{C}x$, proviamo che $z\mathsf{C}y$.
Se $z \neq x$ e $z \neq y$, allora è $z\mathsf{C}'x$ da cui $z\mathsf{C}'y$ e ancora $z\mathsf{C}y$. Se $z = y$, è ovvio che $z\mathsf{C}y$. Se infine è $z = x$, sia t una sottoregione propria di x (esistente per la **3.1.3**). Per **3.1.4b** è $t\mathsf{C}x$, e quindi $t\mathsf{C}'x$. Se $t = y$, abbiamo $t\mathsf{C}y$; se invece $t \neq y$, allora $t\mathsf{C}y$ segue dall'ipotesi $x<y$. Segue infine da **3.1.4a** che $z\mathsf{C}y$.

□

A questo punto i rimanenti assiomi sono verificati.

*Indipendenza di **A5***. Si considerino sia gli aperti regolari che i chiusi regolari (connessi limitati e non vuoti) e continui ad essere $x\mathsf{C}y \;\Leftrightarrow\; x^{-} \cap y^{-} \neq \emptyset$. **A5** non vale in quanto da $\mathsf{C}(x) = \mathsf{C}(y)$ è possibile dedurre soltanto che $x^{-} = y^{-}$, ma non $x = y$.

*Indipendenza di **A9***. Si considerino i tetraedri di $\mathcal{R}$. Per verificare **A7** si osservi che si ottiene una dissezione propria di ogni tetraedro semplicemente considerando un piano passante per un suo vertice e non parallelo a nessuna delle sue facce. **A9** non vale perché è possibile che due tetraedri s'intersechino in modo da avere in comune un solido che non è un tetraedro. (Per avere un esempio più semplice basta mettersi in dimensione due e considerare i triangoli).

APPENDICE 2

Riportiamo qui di seguito le *assunzioni* e le *definizioni* proposte da A. N. Whitehead nei capitoli II e III della parte IV di *Process and reality*. Per la traduzione e la numerazione si è tenuto conto dell'edizione italiana a cura di N. Bosco.

Dal capitolo II
(*Notazione*: **D** = Definizione ; **W** = Assunzione)

D1. Due regioni sono connesse "mediatamente" quando entrambe sono connesse con una terza regione.

W1. La connessione e la connessione mediata sono relazioni simmetriche.

W2. Nessuna regione è connessa con tutte le altre, inoltre due regioni sono sempre connesse mediatamente.

W3. La connessione non è transitiva.

W4. Nessuna regione è connessa o connessa mediatamente con se stessa.

D2. Diremo che una regione *A* "include" una regione *B* quando ogni regione connessa con *B* è anche connessa con *A*.

W5. Quando una regione ne include un'altra, le due regioni sono connesse.

W6. La relazione di inclusione è transitiva.

W7. Una regione non include se stessa.

W8. La relazione di inclusione è asimmetrica; cioè se *A* include *B*, allora *B* non include *A*.

W9. Ogni regione include altre regioni e due regioni incluse in una regione non sono necessariamente connesse tra loro. Coppie di regioni non connesse si trovano sempre incluse in ogni regione data.

D3. Diremo che due regioni "si sovrappongono" quando c'è una terza regione che entrambe includono.

W10. La relazione di sovrapposizione è simmetrica.

W11. Se una regione include un'altra regione, le due regioni si sovrappongono.

W12. Due regioni che si sovrappongono sono connesse.

D4. Una "dissezione" di una regione data *A*, è un gruppo di regioni tali che (I) tutti i suoi membri sono inclusi in *A*, (II) non ci sono due dei suoi membri che si sovrappongono, (III) una regione inclusa in *A*, che non è membro del gruppo, o è inclusa in un membro del gruppo, o si sovrappone a più membri del gruppo.

W13. Ci sono molte dissezioni di ogni data regione.

W14. Una dissezione di una regione non è dissezione di alcuna altra regione.

D5. Una regione è chiamata "intersezione" di due regioni sovrapposte, *A* e *B*, quando (I) o è inclusa sia in *A* che in *B*, o è una delle due regioni ed è inclusa nell'altra, e (II) nessuna regione, parte sia di A che di B, può sovrapporsi ad essa senza esservi inclusa.

D6. Se due regioni A e B hanno una sola intersezione diremo che si sovrappongono con "intersezione unica", se c'è più di un intersezione diremo che si sovrappongono con "intersezione multipla".

W15. Ogni regione contenuta in ciascuna di due regioni sovrapposte, che non sia essa stessa un'intersezione, è inclusa in una e soltanto una intersezione.

W16. Se A include B, allora B è la sola intersezione di A e B.

W17. Un'intersezione di due regioni, che non sia una delle due regioni, è inclusa in entrambe le regioni.

W18. Ogni coppia di regioni sovrapposte ha almeno un'intersezione.

D7. Due regioni sono connesse "esternamente" quando (I) sono connesse, e (II) non si sovrappongono.

D8. Una regione B è inclusa "tangenzialmente" in una regione A quando (I) B è inclusa in A, e (II) esistono regioni che sono connesse esternamente con entrambe.

D9. Una regione B è inclusa "non tangenzialmente" in una regione A quando (I) B è inclusa in A, e (II) non esiste una terza regione che sia connessa esternamente sia con A che con B.

D10. Un gruppo di regioni è detto "gruppo astrattivo" quando (I) presi due membri qualsiasi del gruppo uno di essi include l'altro non tangenzialmente, e (II) non esiste una regione inclusa in ogni membro del gruppo.

D11. Diremo che un gruppo astrattivo α "copre" un gruppo astrattivo β quando ogni membro del gruppo α include qualche membro del gruppo β.

D12. Diremo che due gruppi astrattivi sono "equivalenti" quando ogni gruppo copre l'altro.

W19. Un gruppo astrattivo è equivalente a se stesso.

D13. Un "elemento geometrico" è un insieme completo di gruppi astrattivi equivalenti l'uno all'altro, e non equivalenti ad alcun gruppo astrattivo dell'insieme.

W20. La relazione di equivalenza è transitiva e simmetrica.

D14. L'elemento geometrico a cui appartiene un gruppo astrattivo è detto l'elemento geometrico "associato" a quel gruppo astrattivo.

W21. Ogni gruppo astrattivo che copra un membro di un elemento geometrico copre anche ogni membro di quell'elemento.

W22. Un gruppo astrattivo che sia coperto da un qualsiasi membro di un elemento geometrico è anche coperto da ogni membro di quell'elemento geometrico.

W23. Se a e b sono due elementi geometrici, o ogni membro di a copre ogni membro di b, o nessun membro di a copre qualche membro di b.

D15. Diremo che un elemento geometrico a è "incidente" nell'elemento geometrico b quando ogni membro di b copre ogni membro di a, ma a e b non sono identici.

W24. Un elemento geometrico non è incidente in se stesso.

D16. Un elemento geometrico è detto "punto" quando non esistono elementi geometrici in esso incidenti.

D16.1. I membri di un elemento geometrico sono detti "primi" rispetto alle condizioni date quando (I) soddisfano le condizioni; (II) se un qualsiasi gruppo astrattivo soddisfa le condizioni allora ogni gruppo astrattivo ad esso equivalente anche vi soddisfa; (III) non esiste elemento geometrico i cui membri soddisfino le condizioni, che sia anche incidente nell'elemento geometrico dato. Un elemento geometrico sarà detto primo se i suoi membri sono primi nel senso appena definito.

D17. Un gruppo astrattivo che sia membro di un punto sarà detto "puntuale".

D18. Un elemento geometrico è detto un "segmento fra due punti *P* e *Q*", quando è primo rispetto alla condizione che i punti *P* e *Q* siano incidenti in esso.

D19. Quando un elemento geometrico è un segmento fra due punti, quei punti sono chiamati "estremi" del segmento.

D20. Un gruppo astrattivo che sia membro di un segmento è chiamato "segmentale".

W25. Ci sono segmenti diversi con gli stessi estremi; ma un segmento ha una sola coppia di estremi.

D21. Diremo che un punto è "situato" in una regione, quando la regione è membro di uno dei gruppi astrattivi puntuali a cui è associato quel punto.

W26. Se un punto è situato in una regione, le regioni situate abbastanza avanti nelle estremità convergenti dei vari gruppi astrattivi che compongono quel punto sono incluse in quella regione non tangenzialmente.

D22. Diremo che un punto è situato sulla "superficie" di una regione quando tutte le regioni in cui esso è situato si sovrappongono a quella data, ma non sono incluse in essa.

D23. Un "luogo completo" è un gruppo di punti composto da tutti i punti situati in una regione, o da tutti i punti situati sulla superficie di una regione, o da tutti i punti incidenti in un elemento geometrico.

D24. Quando un luogo completo consiste di tutti i punti di una regione, sarà detto il "volume" di quella regione; quando consiste di tutti i punti della superficie di una regione, sarà detto la "superficie" di quella regione; quando consiste di tutti i punti incidenti in un segmento fra estremi, sarà detto un "tratto lineare" fra quegli estremi.

W27. Esiste corrispondenza biunivoca fra i volumi e le regioni, fra le superfici e le regioni, fra i tratti lineari e i segmenti, e fra qualsiasi elemento geometrico ed il luogo dei punti in esso incidenti.

W28. Se due punti giacciono in un volume, ci sono tratti lineari che li congiungono, i cui punti giacciono tutti in tale volume.

W29. Se due punti giacciono su di una superficie, ci sono tratti lineari che li congiungono, i cui punti giacciono tutti sulla superficie.

W30. Se due punti giacciono in un tratto lineare dato, c'è uno, ed un solo tratto lineare avente quei punti come estremi, i cui punti giacciono interamente nel tratto lineare dato.

W31. Un "luogo completo" consiste in un numero infinito di punti.

Dal capitolo III

(*Notazione*: **Def** = Definizione ; **Ass** = Assunzione)

Def 0. Un gruppo astrattivo sarà detto "ovato" se tutti i suoi membri appartengono alla classe ovata completa presa in esame.

Def 1. Una classe di regioni è chiamata "ovata" se soddisfa le condizioni dei due insiemi seguenti, (a) e (b):

(a) *insieme non-astrattivo*

(I) Due regioni sovrapposte qualsiasi della classe ovata hanno un'unica intersezione.

(II) Un non-ovale, si sovrappone a qualche ovale con un'intersezione multipla.

(III) Un ovale si sovrappone a qualche non-ovale con un'intersezione multipla.

(IV) Due ovali connessi esternamente, hanno le superfici che si toccano o in un luogo completo di punti o in un unico punto.

(V) Ogni non-ovale è connesso esternamente con qualche ovale in modo che le loro superfici si tocchino in un gruppo di punti che non formano un luogo completo.

(VI) Ogni ovale è connesso esternamente con qualche non-ovale in modo che le loro superfici si tocchino in un gruppo di punti che non formano un luogo completo.

(VII) Dato un numero finito di regioni esiste un ovale che le include tutte.

(VIII) Se A e B sono ovali e A include B, esiste un ovale che include B ed è incluso in A.

(IX) Ogni ovale possiede dissezioni ovate.

(b) *insieme astrattivo*

(I) Ogni punto possiede membri ovati.

(II) Se si considera un gruppo di due, o di tre, o di quattro punti, esistono gruppi astrattivi primi rispetto alla duplice condizione (i) di coprire i punti in questione e (ii) di essere equivalente ad un gruppo astrattivo ovato.

(III) Ci sono gruppi di cinque punti per cui non esiste gruppo astrattivo che sia primo rispetto alla duplice condizione (i) e (ii) appena menzionata.

Ass 1. Esiste almeno una classe ovata.

Def 2. Denoteremo con α tale classe ovata.

Ass 2. Se due gruppi astrattivi sono primi rispetto alla stessa condizione duplice (i) di coprire un *dato* insieme di punti, e (ii) di essere equivalenti a un qualsiasi gruppo astrattivo ovato (che copre il gruppo dei punti menzionato), allora essi sono equivalenti.

Prova. I due gruppi astrattivi sono equivalenti *o* allo stesso gruppo astrattivo ovato, *o* a differenti gruppi astrattivi ovati. Nel primo caso, la tesi è ovvia.
Nel secondo caso, siano μ e ν i due differenti gruppi astrattivi ovati. Si nota che sia μ che ν soddisfano la duplice condizione (i) e (ii). Dobbiamo provare che essi sono equivalenti. Siano M e N due regioni appartenenti rispettivamente a μ e ν. Si ha che M ed N coprono i punti del "dato insieme" e quindi M ed N s'intersecano; ma essendo ovali hanno un'unica intersezione, e tutti i punti del *dato* insieme debbono essere situati su di essa. Peraltro questa intersezione è ovale. Ora, essendo M ed N scelti a caso in μ e ν, è possibile, considerando tali intersezioni, trovare un terzo gruppo astrattivo che soddisfi alla duplice condizione (i) e (ii) e che sia coperto sia da μ che da ν; ma dal momento che μ e ν sono primi rispetto alla duplice condizione (i)

e (ii), essi sono entrambi equivalenti a questa nuova classe attrattiva. Per transitività, μ e ν risultano equivalenti.

□

Corollario. Ne segue che tutti i gruppi astrattivi, primi rispetto alla stessa condizione duplice di questo tipo, appartengono ad un unico elemento geometrico.

Def 3. L'elemento geometrico (tra l'altro unico), definito, secondo l'**Ass 2**, da un gruppo di due punti è chiamato "segmento di retta" fra quegli estremi. Se il gruppo di punti comprende più di due punti, l'elemento geometrico è detto "piano". I segmenti di retta sono anche compresi sotto la designazione di "elementi geometrici piani".

Def 4. Diremo che un gruppo di punti, che definisce un elemento geometrico piano, è nei suoi termini più bassi, quando non contiene alcun sottogruppo che definisca lo stesso elemento geometrico piano.

Ass 3. Non ci sono due gruppi con un numero finito di punti, entrambi nei loro termini più bassi, che definiscano lo stesso elemento geometrico.

Def 5. Il luogo dei punti incidenti in un "segmento di retta" è detto la "linea retta" compresa fra gli estremi del segmento.

Def 6. Il luogo dei punti incidenti in un elemento geometrico piano è detto il "contenuto" di quell'elemento. Esso è anche chiamato "un luogo piano".

Ass 4. Se un sottogruppo di punti giace in un luogo piano, quel sottogruppo definisce un luogo piano contenuto entro il luogo dato.

Def 6. Una retta completa è un luogo di punti tale che (I) la retta che congiunge due membri qualsiasi del luogo è contenuta nel luogo, (II) ogni sottogruppo del luogo che sia dato nei suoi minimi termini consiste di due punti, (III) nessun punto può essere aggiunto al luogo senza la perdita di almeno una delle caratteristiche (I) e (II).

Def 7. Un triangolo è un luogo piano definito da tre punti non allineati. I tre punti sono detti "vertici" del triangolo.

Def 8. Un piano è un luogo di punti non allineati tali che (I) il triangolo definito da tre membri qualsiasi non allineati del luogo è contenuto nel luogo, (II) preso un numero finito di punti del luogo esiste un triangolo contenuto nel luogo che li contiene, (III) nessun punto può essere aggiunto al luogo senza la perdita di almeno una delle caratteristiche (I) e (II).

Def 9. Un tetraedro è il luogo piano definito da quattro punti non complanari.

Def 10. Uno spazio tridimensionale è un luogo di punti non complanari tale che (I) il tetraedro definito da quattro punti qualsiasi no complanari del luogo è contenuto nel luogo, (II) preso un numero finito di punti del luogo esiste un tetraedro contenuto nel luogo che li contiene, (III) nessun punto può essere aggiunto al luogo senza la perdita di almeno una delle caratteristiche (I) e (II).

Riferimenti bibliografici

Checcucci V., Tognoli A., Vesentini E., (1968), *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano.

Curzio M., Longobardi P., Maj M., (1994), *Lezioni di algebra*, Liguori, Napoli.

Gerla G., Miranda A., (2006), *Inclusion and Connection in Whitehead's point free geometry*, nel Handbook of Whiteheadian process thought, M. Weber Editor.

Gerla G., Tortora R., (1996), *Dissezioni, intersezioni di regioni in A. N. Whitehead*, Epistemologia, 19 289-308.

Gerla G., Tortora R., (1992), *La relazione di connessione in A. N. Whitehead: aspetti matematici*, Epistemologia, 15, 351-364.

Koppelberg S., (1989), *Handbook of Boolean Algebras*, vol.1, Monk and Robert Editors,North-Holland

Whitehead A. N., (1919), *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Univ. Press. Cambridge.

Whitehead A. N., (1929), *Process and reality*, Macmillan, New York.

Whitehead A. N., (1920), *The concept of Nature*, Univ. Press. Cambridge.

Willard S., (1970), *General topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading.

Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy Sets*, Information and Control 12, 338-353.